Theoretische und experimentelle Untersuchungen über innere Reibung von Flüssigkeiten.

Inaugural-Dissertation

welche mit Genehmigung

der

Philosophischen Facultät der Königl. Universität Breslau

zur Erlangung der Doctorwürde

Freitag, den 26. August 1881, Mittags 12 Uhr

öffentlich vertheidigen wird

Theodor Siegfried Schmidt

Assistent am physikalischen Cabinet der Universität Königsberg

gegen die Herren Opponenten

Eugen Bartsch, Cand. phil.

Adolf Schmidt, Cand. phil.

Julius Aust, Cand. phil.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

Breslau.

Druck von Grass, Barth und Comp. (W. Friedrich.)

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543119_0055

Seiner lieben theuren Mutter

in kindlicher Liebe und tiefster Dankbarkeit

gewidmet.

Benützte Abhandlungen.

Coulomb: Expériences destinées à déterminer la cohérence des fluides. Mém. de l'Inst. nat. T. III. Prairial an IX.

J. Clerk Maxwell: On the viscosity or internal friction of air and other gases. London, Phil. transact. 1866 p. I; v. 156.

O. E. Meyer: Ueber die Reibung der Flüssigkeiten, Crelle's Journal Bd. 59 und 63, Pogg. Ann. Bd. 113, Wiedemann's Ann. Bd. II.

Plateau: Recherches expérimentales et théoriques sur les figures d'équilibre d'une masse sans pésanteur. 8. série. Ann. de chim. et de phys. Ser. IV, T. XVII, auch Pogg. Ann. 141.

Marangoni: Sul principio della viscosità superficiale dei liquidi stabilitó dal sig. J. Plateau; N. Cimento S. 2, v. V—VI. 1872.

O. Grotrian: Die Reibungsconstanten einiger Salzlösungen. Pogg. Ann. 157.

A. Oberbeck: Ueber die Reibung in freien Flüssigkeitsoberflächen. Wiedemann's Ann. Bd. XI, Heft IV. 1880.

J. Stefan: Ueber die Bewegung flüssiger Körper. Sitzungsberichte der Wiener Akademie; Bd. 46.

E. Warburg: Ueber den Ausfluss des Quecksilbers aus gläsernen Capillarröhren. Pogg. Annalen Bd. 140.

§ 1.

Der Erste, welcher die Abnahme der Schwingungen einer Scheibe in einer Flüssigkeit dazu benützte, den Coefficienten der inneren Reibung der letzteren zu berechnen, war Coulomb. Nach ihm wird die Tiefe der benützten Flüssigkeitsschicht so gross angenommen, dass sie bei der Rechnung gleich unendlich gesetzt werden darf. Maxwell hat zur Bestimmung des Reibungs-Coefficienten der Gase dieses Experiment dahin abgeändert, dass er im Gegentheil die Scheibe sehr nahe über dem Gefässboden schwingen liess. Obgleich nun die Resultate dieser letzten Methode sehr viel genauere sind, als die mit Coulombs Methode zu erreichenden, so ist dennoch meines Wissens bisher noch kein Versuch gemacht worden, dieselbe auf Flüssigkeiten anzuwenden.

Im Folgenden soll daher die Theorie dieses Experimentes von Maxwell für Flüssigkeiten durchgeführt, sowie eine Reihe von Versuchen mitgetheilt werden, welche der Verfasser im Anschlusse hieran während des Jahres 1880 im physikalischen Institute der Universität Breslau angestellt hat. Dieselben haben dazu gedient, den Reibungs-Coefficienten für Wasser, Alkohol und Quecksilber zu bestimmen.

Die Theorie darf jedoch aus mehrfachen Gründen nur als eine angenäherte gelten. Erstlich nämlich wurde bei der Aufstellung der Differentialgleichung derjenige Betrag der Reibung nicht in Rechnung gebracht, welcher von den gekrümmten Rändern der schwingenden Flüssigkeitsringe herrührt; zweitens aber wurde bei der Aufstellung der Endbedingungen des Umstandes nicht Rechnung getragen, dass an der Oberfläche Capillarkräfte wirken und auch entweder nach Plateau an derselben eine Oberflächenzähigkeit, oder nach Marangoni eine

Oberflächenelasticität, oder nach Oberbeck eine rapide Zunahme des Coefficienten der inneren Reibung auftritt. Der Einfluss dieser Grössen auf das logarithmische Decrement der von mir benützten Scheibe schien mir so gering, dass ich ihn mit hinreichender Annäherung vernachlässigen zu dürfen glaubte. Für die Berechnung des Coefficienten der inneren Reibung der Flüssigkeiten wurden 2 neue Formeln aufgestellt, von denen die eine für sehr kleine, die andere für sehr grosse Entfernungen zwischen Scheibe und Gefässboden gilt. Das Experiment war folgendes:

Eine cylindrische Glasscheibe vom Radius R mm und dem Trägheitsmomente M mg mm^2 ist an einem elastischen Drahte so aufgehängt, dass ihre Hauptträgheits-Achse mit der des Drahtes zusammenfällt. Ihre untere Fläche berührt grade eine Flüssigkeit, welche sich in einem der Scheibe coaxialen cylindrischen Gefässe befindet und dasselbe bis zur Höhe von c_1 mm anfüllt. Es soll das Gesetz ermittelt werden, nach welchem die Bewegung der Scheibe und der Flüssigkeit vor sich geht, erstlich unter der Voraussetzung, dass die Flüssigkeit an Scheibe und Gefäss haftet, zweitens unter der Voraussetzung, dass die Flüssigkeit an Scheibe und Boden gleitet.

§ 2.

Ich mache die Achse des Drahtes zur X-Achse und rechne X von der unteren Fläche der Scheibe an positiv nach unten. Als Volumen-Element betrachte ich einen Ring, dessen Achse die X-Achse, dessen Dicke dx und dessen Radien r und r + dr sind. Sehe ich von der Dilatation durch die Centrifugalkraft ab, so wird sich ein solcher Ring wie ein fester Körper bewegen. An ihn wird durch die Reibung durch alle Flächen Bewegungsquantität übertragen; durch die obere ebene und die innere cylindrische Fläche empfängt er Bewegungsquantität; durch die untere ebene und die äussere cylindrische Fläche giebt er welche ab. Die wirklich im Ringe vorhandene Bewegungs-Quantität ist die Differenz der empfangenen und abgegebenen.

Ist D die Dichtigkeit der Flüssigkeit, so ist das Trägheitsmoment eines Ringes um die X-Achse

$$2r^3\pi \, dr \, . \, dx \, . \, D.$$

Die Reibung wirkt nach Newtons Hypothese der Zeit, der Fläche und dem Differential-Quotienten der Geschwindigkeit nach der Normalen der reibenden Fläche proportional. Ist η der Reibungs-Coefficient der Flüssigkeit, so wirkt auf die obere ebene Ringfläche in der Zeiteinheit folgendes Drehungsmoment der bewegenden Kraft der Reibung

$$-2rdr\pi\eta \cdot \frac{\partial(r\psi)}{\partial x} r = -2\pi\eta r^3 \frac{\partial\psi}{\partial x} dr$$

wenn ψ die Winkelgeschwindigkeit eines Ringes um die X-Achse ist. Durch die untere ebene Ringfläche wird an den darunter befindlichen Flüssigkeitsring folgende Bewegungs-Quantität abgegeben:

$$-2\pi\eta r^3 dr \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{x+dx} = -2\pi\eta r^3 dr \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} dx\right).$$

Mithin ergiebt sich als Differenz

$$2\pi\eta r^3 dr \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} dx.$$

Nun soll die oberste Flüssigkeitsschicht an der Scheibe haften: daher wird sich diese jedenfalls als ein Ganzes bewegen. Die letzte Schicht muss in Folge des Haftens am Gefässboden in Ruhe bleiben, also ebenfalls ein Ganzes bilden. Ist nun die Flüssigkeitsschicht sehr dünn, so wird die Annahme der Wahrheit sehr nahe kommen, dass sich auch die zwischenliegenden Schichten wie compacte Scheiben von unendlich kleiner Dicke bewegen müssen. Auch für dickere Flüssigkeitsschichten wird diese Annäherung gestattet sein. Das heisst aber, dass $\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = 0$ ist, dass also die von den gekrümmten Rändern des Ringes herrührende Reibung vernachlässigt werden darf. Mithin heisst die Bewegungsgleichung eines Flüssigkeitsringes

$$D \frac{\partial\psi}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2},$$

für welche nach unserer Annahme die Bedingungen gelten, dass

für $x = c_1$ $\psi = 0$ sei, ebenso

für $t = 0$ $\psi = 0$ sei, dass dagegen für $x = 0$ die Flüssigkeit die Geschwindigkeit der Scheibe habe.

Auf die Scheibe wirken zwei Kräfte: die Torsion des Drahtes und die Reibung an der Flüssigkeit, beide der Be-

wegung entgegen. Ist $rdrd\varphi$ ein Flächenelement der Scheibe, so ist das in Folge der Reibung auf die Scheibe ausgeübte Drehungsmoment der verzögernden Kraft

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_0 \eta \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 dr d\varphi = \frac{R^4\pi}{2}\,\eta \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_0$$

Ist τ das Torsionsmoment des Drahtes, $\boldsymbol{M}$ das Trägheitsmoment des Systems, so ist, wenn φ die Ablenkung der Scheibe bezeichnet, die Bewegungsgleichung der Scheibe

$$\boldsymbol{M}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\tau\varphi + \frac{R^4\pi}{2}\,\eta\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_0$$

Hierbei ist $(\dot{\psi})_{x=0} = \frac{d\varphi}{dt}$.

Für φ gilt übrigens noch die Bedingung, dass zur Zeit $t = 0$, zu Anfang des Experimentes $\varphi = \Phi_0$ war.

Die Bewegungsgleichung der Scheibe, welche hier als selbständige simultane Differentialgleichung hergeleitet wurde, tritt in der weiteren Rechnung nur als Bedingungsgleichung auf.

§ 3.

Ich schliesse mich in der Bezeichnung an diejenige von O. E. Meyer in der für derartige Untersuchungen grundlegenden Abhandlung in Crelles Journal, Band 59, an und transformire nach ihm die entwickelte Differentialgleichung folgendermassen:

$$\text{Setze } x = y\sqrt{\frac{\eta}{D}}\,,\quad c_1 = c\sqrt{\frac{\eta}{D}}\quad \frac{\tau}{\boldsymbol{M}} = \alpha^4\,;\quad \frac{\pi R^4\sqrt{\eta D}}{4\boldsymbol{M}} = \beta.$$

Dann geht die entwickelte Differentialgleichung über in

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \tag{1}$$

und es soll für

$$y = c \ldots \psi = 0, \tag{2}$$

$$y = 0 \ldots \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\alpha^4\varphi + 2\beta\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_0, \tag{3}$$

$$t = 0 \ldots \psi(y) = 0 \text{ und } \frac{d\varphi}{dt} = 0,\ \varphi = \Phi_0 \tag{4}$$

sein.

Ein particulares Integral von (1) ist bekanntlich

$$\psi = e^{-m^2t} (A \sin my + B \cos my)$$

wo m, A, B Constanten sind. Die vollständige Lösung von (1) ist die Summe aller particularen Integrale; also ergiebt sich

$$\psi = \sum e^{-m^2t} (A \sin my + B \cos my) \tag{5}$$

als vollständige Lösung von (1). Zu summiren ist über alle particularen Integrale.

Nun soll nach (2)

$$0 = \sum e^{-m^2t} (A \sin mc + B \cos mc)$$

sein und zwar für jeden Werth von t. Das ist aber nur möglich, wenn für sich

$$A \sin mc + B \cos mc = 0 \text{ ist.}$$

Hieraus folgt

$$A = -\frac{B \cos mc}{\sin mc}.$$

Mithin wird (5)

$$\psi = \sum e^{-m^2t} \frac{\sin m(c-y)}{\sin mc} B.$$

Für $y = 0$ soll $\psi = \frac{d\varphi}{dt}$, gleich der Geschwindigkeit der Scheibe sein; also

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sum e^{-m^2t} B.$$

Hieraus folgt durch Integration

$$\varphi = \gamma - \sum \frac{e^{-m^2t}}{m^2} B,$$

wo γ die additive Constante ist. Hierdurch soll (3) erfüllt sein; also

$$-\sum m^2 c^{-m^2t} B = -\alpha^4\gamma + \alpha^4 \sum e^{-m^2t} \frac{B}{m^2} - 2\beta \sum e^{-m^2t} m \cot mc\, B.$$

Da diese Bedingung für alle Werthe von t gelten soll, so muss $-\alpha^4\gamma = 0$ und $m^2 + \frac{\alpha^4}{m^2} - 2\beta\, m \cot mc = 0$ sein, also

$\gamma = 0$ und

(6) $$m^4 + \alpha^4 - 2\beta\, m^3 \cot mc = 0$$

sein. Es wird also

(7^a) $$\psi = \sum e^{m^2 t} B \frac{\sin m(c-y)}{\sin mc}$$

(7^b) $$\varphi = -\sum B \frac{e^{m^2 t}}{m^2}$$

(7^c) $$\frac{d\varphi}{dt} = \sum B\, e^{-m^2 t}.$$

Damit also (4) erfüllt werde; muss

(8) $$\sum B \frac{\sin m(c-y)}{\sin mc} = 0,$$

$$\sum B = 0 \text{ und } \sum \frac{B}{m^2} = -\Phi_0$$

sein.

Es bleibt noch übrig B zu bestimmen. Hierzu erinnere ich mich, dass

(9) $$\int_0^c \frac{\sin m(c-y)}{\sin mc} \cdot \frac{\sin n(c-y)}{\sin nc}\, dy = \frac{m \cot mc - n \cot nc}{n^2 - m^2}$$

ist, so lange $m \gtrless n$; dass aber für $m = n$

(9^a) $$\int_0^c \frac{\sin^2 m(c-y)}{\sin^2 mc}\, dy = \frac{c}{2\sin^2 mc} - \frac{\cot mc}{2m}.$$

Nun multiplicire ich die Gleichung

$$\sum B \frac{\sin m_i (c-y)}{\sin m_i c} = 0$$

mit $\frac{\sin m_\varkappa (c-y)}{\sin m_\varkappa c}\, dy$ und integrire von 0 bis c; es ergiebt sich

$$0 = \sum_{i \gtrless \varkappa} B_i \frac{m_i \cot m_i c - m_\varkappa \cot m_\varkappa c}{m_\varkappa^2 - m_i^2} + \frac{B_\varkappa}{2}\left(\frac{c}{\sin^2 m_\varkappa c} - \frac{\cot m_\varkappa c}{m_\varkappa}\right)$$

Nun sind aber m_i und $m_\varkappa$ Wurzeln der Gleichung (6); also ist

$$\frac{m_i \cot m_i c - m_\varkappa \cot m_\varkappa c}{m_\varkappa^2 - m_i^2} = \frac{\alpha^4}{2\beta m_i^2 m_\varkappa^2} - \frac{1}{2\beta}$$

$$\frac{c}{\sin^2 m_\varkappa c} - \frac{\cot m_\varkappa c}{m_\varkappa} = c\,(1 + \cot^2 m_\varkappa c) - \frac{\cot m_\varkappa c}{m_\varkappa}$$

$$= c\left(1 + \left(\frac{m_\varkappa^4 + \alpha^4}{2\beta\, m_\varkappa^3}\right)^2\right) - \frac{m_\varkappa^4 + \alpha^4}{2\beta\, m_\varkappa^4}$$

Mithin soll sein $0 = \sum B_i \left(\frac{\alpha^4}{2\beta\, m_i^2\, m_\varkappa^2} - \frac{1}{2\beta}\right)$

$$+ \frac{B_\varkappa}{2}\left\{c + c\left(\frac{m_\varkappa^4 + \alpha^4}{2\beta\, m_\varkappa^3}\right)^2 - \frac{m_\varkappa^4 + \alpha^4}{2\beta\, m_\varkappa^4}\right\}$$

oder übersichtlicher geschrieben

$$0 = \frac{\alpha^4}{2\beta\, m_\varkappa^2} \sum \frac{B_i}{m_i^2} - \frac{1}{2\beta} \sum B_i + \frac{B_\varkappa}{2}\left\{c + c\left(\frac{m_\varkappa^4 + \alpha^4}{2\beta\, m_\varkappa^3}\right)^2 - \frac{m_\varkappa^4 + \alpha^4}{2\beta\, m_\varkappa^4}\right\}.$$

Die Summen sind hier zu nehmen über alle möglichen m_i, ausser für $m_\varkappa$. Da nun

$$-\sum \frac{B_i}{m_i^2} = \Phi_0$$

ist, wenn über sämmtliche Wurzeln m_i summirt wird, so folgt

$$-\sum_{i = 1, 2 \ldots \varkappa - 1, \varkappa + 1 \ldots \infty} \frac{B_i}{m_i^2} = \Phi_0 + \frac{B_\varkappa}{m_\varkappa^2}$$

wenn ich durch die Indices 1, 2, ... ∞ die verschiedenen Wurzeln m und die dazu gehörigen Constanten bezeichne. Ferner ist

$$\sum_{i = 1, 2, \ldots \infty} B_i = 0 \quad \text{mithin} \quad \sum_{i = 1, 2 \ldots \varkappa - 1, \varkappa + 1, \ldots \infty} B_i = -B_\varkappa.$$

Es muss also sein

$$0 = \frac{\alpha^4}{2\beta\, m_\varkappa{}^4}\left(-\Phi_0 - \frac{B_\varkappa}{m_\varkappa{}^2}\right) + \frac{1}{2\beta} B_\varkappa$$
$$+ \frac{B_\varkappa}{2}\left(c + c\left(\frac{m_\varkappa{}^4 + \alpha^4}{2\beta\, m_\varkappa{}^3}\right)^2 - \frac{m_\varkappa{}^4 + \alpha^4}{2\beta\, m_\varkappa{}^4}\right)$$

Und hieraus folgt

$$B_\varkappa = \frac{\Phi_0 \alpha^4}{2\beta m^2\left\{\frac{1}{2\beta}\left(1-\frac{c}{2}\right) + \frac{c}{2} + \frac{\alpha^4 c}{8\beta^2 m^6} + \frac{\alpha^4}{4\beta m^2} + \frac{cm^2}{8\beta^2} - \frac{\alpha^4}{2\beta m^4}\left(1+\frac{c}{2}\right)\right\}}$$

Hierdurch sind sämmtliche Constanten durch die gegebenen Grössen ausgedrückt, das Problem ist mathematisch gelöst.

§ 4.

Betrachte ich zunächst den Fall, dass die Scheibe ohne Reibung in dem Medium schwingt, so habe ich η, also auch $\beta = 0$ zu setzen. Dann erhält die Gleichung (3) die Form

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\tau\varphi.$$

Diese Gleichung hat die grösste Aehnlichkeit mit der Pendelgleichung und zeigt, dass periodische Schwingungen eintreten werden. Die Gleichung (6), welche die Gestalt

$$m^4 + \alpha^4 = 0$$

annimmt, liefert mir in diesem Falle 4 complex imaginäre Wurzeln.

Dass auch in dem Falle, wenn Reibung stattfindet, vier und höchstens vier complexe Wurzeln auftreten können, hat O. E. Meyer im 63. Bande des Crelle'schen Journals von einer Gleichung bewiesen, welche mit (6) durchaus übereinstimmt. Für den Fall einer sehr kleinen Entfernung c_1 scheint jedoch der Beweis, dass die vier complexen Wurzeln in der That auftreten, noch besonders geführt werden zu müssen. Hierzu construiren wir uns in bekannter Weise die Curven, welche

entstehen, wenn wir zu den Grössen m als Abscissen die Werthe der beiden Seiten der Gleichung

$$(6^a) \qquad \cot mc = \frac{m^4 + \alpha^4}{2\beta\, m^3}$$

als Ordinaten zeichnen. Setzen wir

$$z_1 = \cot mc \text{ und } z_2 = \frac{m^4 + \alpha^4}{2\beta\, m^3}$$

so wird m dann eine reelle Wurzel von (6^a) sein, wenn es die Abscisse eines Schnittpunktes beider Curven ist; für diesen ist nämlich $z_1 = z_2$.

Die Curve z_1 besteht aus unendlich vielen Zweigen, welche von $+\infty$ an steil herabfallen, die M-Achse schneiden und dann steil bis $-\infty$ sinken; und zwar ist

$$z_1\left(\frac{i\pi}{c} + \delta\right) = \infty \text{ für } i = 0, 1, 2 \ldots \infty$$

$$z_1\left(\frac{2i+1}{2}\,\frac{\pi}{c}\right) = 0 \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad "$$

$$z_1\left(\frac{i\pi}{c} - \delta\right) = -\infty \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad "$$

wo δ eine unendlich kleine Grösse ist.

Es ist ferner

$$z_2\,(0) = \infty$$

$$\frac{dz_2}{dm} = \frac{m^4 - 3\alpha^4}{2\beta m^4}.$$

Mithin erreicht die Curve für

$$m = \sqrt[4]{3\alpha^4}$$

ein Minimum.

Ist δ eine sehr kleine Grösse, so ist

$$z_1(\delta) = \frac{1}{\delta}$$

$$z_2(\delta) = \frac{\alpha^4}{2\beta} \cdot \frac{1}{\delta^3}.$$

Während also die Cotangenten für ein sehr kleines m unendlich gross wie $\frac{1}{\delta}$ werden, wird dagegen ebendaselbst z_2

unendlich wie $\frac{1}{\delta^3}$, denn $\frac{\alpha^4}{2\beta}$ hat seiner Definition nach jedenfalls einen endlichen positiven Werth. Daher bleibt in unmittelbarer Nähe der Ordinate z_2 stets oberhalb des ersten Zweiges von z_1.

Nun können zwei Fälle eintreten: die kleinste Ordinate von z_2 ist entweder kleiner oder grösser als die Ordinate von z, für $m = \sqrt[4]{3\alpha^4}$. Ist $z_2 < z_1$, so wird der erste Zweig von z_1 zweimal, jeder folgende aber nur einmal von z_2 geschnitten.

In diesem Falle hat (6ª) augenscheinlich nur reelle Wurzeln. Wird aber für $m = \sqrt[4]{3\alpha^4}$ $z_2 > z_1$, so verschwinden die beiden Durchschnittspunkte von z_2 mit dem ersten Zweige von z_1, d. h. es werden zwei Wurzeln m imaginär; und da auf der negativen Seite der M-Achse dieselben Verhältnisse im dritten Quadranten auftreten, so werden gleichzeitig vier Wurzeln m imaginär, sobald

$$z_2 > z_1$$

wird. Ich zeige nun, dass diese Ungleichung für meine Versuche bestand. — Es soll also

$$\frac{2\alpha}{\sqrt[4]{27\,\beta}} > \cot \sqrt[4]{3\alpha^4}\, c$$

sein. Da stets $\cot mc > \frac{1}{mc}$ ist, so wird die verlangte Ungleichheit bestehen, wenn

$$\frac{2\alpha}{\sqrt[4]{27\,\beta}} > \frac{1}{\sqrt[4]{3\alpha^4}\, c} \quad \text{oder} \quad c > \frac{\sqrt[4]{9}\,\beta}{2\alpha^2} \text{ ist.}$$

Tragen wir für c, β, α ihre Werthe ein und berücksichtigen, dass

$$\alpha^4 = \frac{\tau}{M} = \frac{\pi^2}{T^2}$$

ist, wo T die Schwingungszeit der Scheibe im leeren Raume bedeutet, so ist zu zeigen, dass

$$c_1 > \frac{R^4 T}{4M}\,\eta\sqrt[4]{9}$$

ist.

Für meinen Apparat betrug

$$R = 84 \,.\, 13 \text{ mm}$$
$$M = 10^{10} \,.\, 1{,}5495 \text{ mg mm}^2$$
$$T = 17 \,.\, 1231 \text{ sec}$$

Wird also selbst $\eta = 2$ gesetzt, (für Alkohol, Wasser und Quecksilber ist $\eta < 2$) so wird für das Vorhandensein der imaginären Wurzeln nur verlangt, dass $c_1 > 0 \,.\, 024$ mm ist. Diese Bedingung war für meine Versuche stets erfüllt.

Die reellen Wurzeln der Gleichung (6^a) werden dargestellt durch die Abscissen der Durchschnittspunkte von z_2 mit den unendlich vielen Zweigen von z_1. Die Schnittpunkte werden eintreten hinter den Werthen

$$m = \frac{i\pi}{c} \text{ für } i = 1, 2, \ldots \infty$$

Die reellen Wurzeln von (6^a) werden also sein

$$\frac{\pi}{c} + \delta_1 \,, \quad \frac{2\pi}{c} + \delta_2 \,, \quad \frac{3\pi}{c} + \delta_3 \,, \ldots .$$

wo δ_1 , δ_2 , δ_3 . . kleine Grössen sind.

Da ferner das Minimum von z_2 für einen zwischen $m = 0$ und $m = \frac{\pi}{c}$ gelegenen Werth eintritt (denn für meine Versuche wenigstens ist $\frac{\sqrt[4]{3\pi^2}}{T^2} < \frac{\pi}{c}$), so bilden die Grössen $\delta_1 , \delta_2 , \delta_3 \ldots$ eine abnehmende Reihe.

Die kleinste reelle Wurzel ist somit $> \frac{\pi}{c}$ oder $> \frac{\pi}{c_1}\sqrt{\frac{\eta}{D}}$.

Für Wasser und Alkohol ist $\frac{\eta}{D}$ ein unechter Bruch, und bei meinen Versuchen überstieg c_1 den Werth 2 mm nicht. Daher ist die kleinste bei diesen Versuchen auftretende reelle Wurzel m noch $> \frac{\pi}{2}$. Alle folgenden reellen Wurzeln sind grösser und wachsen bis ins Unendliche.

Bei oberflächlicher Betrachtung sieht es übrigens aus, als wenn die Grösse der reellen Wurzeln m von der Wahl des Längenmaasssystems abhinge. Dem ist jedoch nicht so, wie man sich leicht durch Ermittelung der Dimension von c überzeugt. Es war gesetzt

$$c = c_1\sqrt{\frac{D}{\eta}}.$$

Nun ist die Dimension von c_1, als einer Entfernung, C; diejenige von η bekanntlich $M \cdot l^{-1} \cdot T^{-1}$; diejenige von D ist $M \cdot l^{-3}$, also ist die Dimension von $c = T^{\frac{1}{2}}$.

Was die den reellen Wurzeln m entsprechenden Constanten B betrifft, so zeigt eine kleine Ueberlegung, dass dieselben immer kleiner werden, je grösser die Wurzel m ist.

Nun geht in die Lösung des Problems der Factor $e^{-m^2 t}$ ein. Nehmen wir $t = T_1$ an, wollen also den Werth von ψ nach einer Schwingung ermitteln, so ist der grösste Werth dieser Grösse kleiner als $e^{-\frac{\pi^2}{4} T_1}$, wo T_1 die Schwingungsdauer der Scheibe in der Flüssigkeit ist. Da nun für meine Versuche T_1 grösser ist als 17 Secunden, so muss selbst der grösste von den reellen Wurzeln herrührende Term $e^{-40} B$ verschwinden, da e^{-40} eine Grösse ist, die ich für meine Zwecke der Null gleich setzen kann.

Aber auch wenn c_1 einen bedeutenden endlichen Werth besitzt und die Grösse $\sqrt{\frac{\eta}{D}}$ wie beim Quecksilber ein echter Bruch ist, so leuchtet ein, dass $e^{-m^2 t}$ so klein gemacht werden kann, wie man will, wenn man nur wartet, bis t einen genügend grossen Werth besitzt.

Somit haben sämmtliche reelle Wurzeln der Gleichung (6) keinen messbaren Einfluss und können daher vernachlässigt werden.

Die Gleichung (6) besitzt aber, wie gezeigt ist, ausser unendlich vielen reellen Wurzeln noch vier imaginäre.

Genügt m der Gleichung (6), so genügt ihr auch — m; genügt ihr $m = a + bi$, wo $i = \sqrt{-1}$ ist, so genügt ihr auch $m' = a - bi$. Sind also a und b zwei positive reelle Grössen, so sind die vier complexen allein in Betracht kommenden Wurzeln von (6)

$$m_1 = a + bi \qquad m_2 = -a - bi$$
$$m'_1 = a - bi \qquad m'_2 = -a + bi$$

Das Summenzeichen in den Gleichungen (7) ist jetzt so zu verstehen, dass die Summation über die vier imaginären Wurzeln

m_1 , m'_1 , m_2 , m'_2 auszudehnen ist. Sind die zu den letzteren gehörigen Constanten B resp. B_1 , B'_1 , B_2 , B'_2 , so wird

$$\psi = B_1 e^{-m_1^2 t} \frac{\sin m_1(c-y)}{\sin m_1 c} + B'_1 e^{-m'^2_1 t} \frac{\sin m'_1(c-y)}{\sin m'_1 c}$$

$$+ B_2 e^{-m_2^2 t} \frac{\sin m_2(c-y)}{\sin m_2 c} + B'_2 e^{-m'^2_2 t} \frac{\sin m'_2(c-y)}{\sin m'_2 c}$$

Da nun $e^{-m_1^2 t} \frac{\sin m_1(c-y)}{\sin m_1 c} = e^{-m_2^2 t} \frac{\sin m_2(c-y)}{\sin m_2 c}$

und $e^{-m'^2_1 t} \frac{\sin m'_1(c-y)}{\sin m'_1 c} = e^{-m'^2_2 t} \frac{\sin m'_2(c-y)}{\sin m'_2 c}$

so folgt

$$\psi = (B_1 + B_2) e^{-m_1^2 t} \frac{\sin m_1(c-y)}{\sin m_1 c}$$

$$+ (B'_1 + B'_2) e^{-m'^2_1 t} \frac{\sin m'_1(c-y)}{\sin m'_1 c}$$

Nun soll nach (8)

$$B_1 + B_2 + B'_1 + B'_2 = 0$$

sein, also

$$(B_1 + B_2) = -(B'_1 + B'_2) = B$$

sein. Es wird also

$$\psi = B \left\{ e^{-m^2 t} \frac{\sin m(c-y)}{\sin mc} - e^{-m'^2 t} \frac{\sin m'(c-y)}{\sin m'c} \right\}$$

Es soll ferner

$$-\left(\frac{B_1}{m_1^2} + \frac{B_2}{m_2^2} + \frac{B'_1}{m'^2_1} + \frac{B'_2}{m'^2_2}\right) = \Phi_0$$

sein, oder

$$-B\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{m'^2}\right) = \Phi_0.$$

Hieraus folgt

$$B = \frac{(a^2 + b^2)^2 \Phi_0}{4abi}.$$

Also wird schliesslich

$$\psi = \frac{(a^2 + b^2)^2 \Phi_0}{4abi} \left\{ e^{-m^2 t} \frac{\sin m(c-y)}{\sin mc} - e^{-m_1^2 t} \frac{\sin m_1(c-y)}{\sin m_1 c} \right\}$$

und

$$\varphi = \frac{(a^2 + b^2)^2 \Phi_0}{4abi} \left\{ \frac{e^{-m'^2 t}}{m'^2} - \frac{e^{-m^2 t}}{m^2} \right\}$$

§ 5.

Es handelt sich jetzt darum, die Exponentialfunctionen mit complexen Exponenten und die Kreisfunctionen mit complexen Argumenten zu vereinigen und zu zeigen, dass ψ, φ und $(\psi)_0 = \frac{d\varphi}{dt}$ reelle Werthe besitzen. Dies letztere ist am leichtesten einzusehen; denn es ist

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{(a^2 + b^2)^2\Phi_0}{4abi}\left(e^{-m^2t} - e^{-m'^2t}\right)$$

$$= \frac{(a^2 + b^2)^2\Phi_0}{4abi}\, e^{-(a^2-b^2)t}\left\{e^{-2abit} - e^{2abit}\right\}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{(a^2 + b^2)^2\Phi_0}{2ab}\, e^{-(a^2-b^2)t}\sin 2abt \tag{10}$$

Ferner ist

$$\varphi = \frac{(a^2 + b^2)^2\Phi_0}{4abi}\left\{\frac{e^{-m'^2t}}{m'^2} - \frac{e^{-m^2t}}{m^2}\right\}$$

also

$$\varphi = \frac{\Phi_0 e^{-(a^2-b^2)t}}{2ab}\left\{(a^2-b^2)\sin 2abt + 2ab\cos 2abt\right\} \tag{11}$$

Endlich war

$$\psi = \frac{(a^2 + b^2)^2\Phi_0}{4abi}\left\{e^{-m^2t}\frac{\sin m(c-y)}{\sin mc} - e^{-m'^2t}\frac{\sin m'(c-y)}{\sin m'c}\right\}$$

$$= \frac{(a^2 + b^2)^2\Phi_0}{4abi}\left\{e^{-m^2t}\cos my - e^{-m'^2t}\cos m'y - e^{-m^2t}\cot mc\sin my\right.$$

$$\left. + e^{-m'^2t}\cot m'c\sin m'y\right\}$$

Nun ist

$$e^{-m^2t}\cos my - e^{-m'^2t}\cos m'y = -i\, e^{-(a^2-b^2)t}\left\{e^{by}\sin(2abt + ay)\right.$$

$$\left. + e^{-by}\sin(2abt - ay)\right\}.$$

Ferner ist

$$\cot mc = \frac{m^4 + \alpha^4}{2\beta m^3},\quad \cot m'c = \frac{m'^4 + \alpha^4}{2\beta m'^3},\quad \cot mc = A + Bi,$$

$$\cot m'c = A - Bi$$

$$\text{wo } A = a\,\frac{(a^2+b^2)^3+\alpha^4(a^2-3b^2)}{(a^2+b^2)^3 2\beta}$$

$$B = b\,\frac{(a^2+b^2)^3-\alpha^4(3a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^3 2\beta}$$

ist. Mithin wird

$$e^{-m^2t}\cot mc\sin my - e^{-m'^2t}\cot m'c\sin m'y = e^{-m^2t}\sin my\,(A+Bi)$$
$$- e^{-m'^2t}\sin m'y\,(A-Bi) = i\,e^{-(a^2-b^2)t}\left\{Ae^{by}\cos(ay-2abt) - Ae^{-by}\cos(ay+2abc) + Be^{by}\sin(ay+2abt) + Be^{-by}\sin(ay-2abt)\right\}.$$

Folglich wird

$$(12)\qquad \psi = -\frac{(a^2+b^2)^2\Phi_0\,e^{-(a^2-b^2)t}}{4ab}\left\{Ae^{by}\cos(ay-2abt) - Ae^{-by}\cos(ay+2abt) + (B+1)\,e^{by}\sin(ay+2abt) + (B-1)\,e^{-by}\sin(ay-2abt)\right\}.$$

Dieser Ausdruck geht in der That für $y = 0$ in den Ausdruck (10) über; d. h. die Flüssigkeitsschicht unmittelbar unter der Scheibe hat dieselbe Form der Bewegung wie diese.

§ 6.

Betrachte ich das bestimmte Integral

$$\int_0^c \frac{\cos m(c-y)}{\sin mc}\cdot\frac{\cos m'(c-y)}{\sin m'c}\,dy = \frac{m\cot m'c - m'\cot mc}{m^2-m'^2}$$

und setze voraus, dass m und m′ zwei complex imaginäre Wurzeln der Gleichung (6) sind, so folgt

$$\int_0^c \frac{P^2+Q^2}{p^2+q^2}\,dy = \frac{\alpha^4(a^2-b^2)}{\beta(a^2+b^2)^3}.$$

Da die linke Seite stets positiv ist, so muss es auch die rechte sein. Aber α^4 kann nicht verschwinden, ohne dass auch $a^2+b^2=0$ wäre; dies würde $a = bi$ ergeben, einen Widerspruch gegen die Voraussetzung, dass a und b positiv reell sind. Mithin muss

$$(13)\qquad a^2-b^2 = 1 > 0$$

sein.

Ferner ist

$$\int_0^c \frac{\sin m(c-y)\sin m'(c-y)}{\sin mc \sin m'c}\,dy = \frac{m\cot mc - m'\cot m'c}{m'^2 - m^2};$$

unter der Voraussetzung, dass m und m' complex imaginäre Wurzeln von (6) sind, ergiebt sich

$$\int_0^c \frac{M^2+N^2}{m^2+n^2}\,dy = \frac{1}{2\beta}\left\{\frac{\alpha^4}{(a^2+b^2)^2} - 1\right\}.$$

Hierzu muss stets

$$\alpha^4 > (a^2+b^2)^2$$

sein, oder $\frac{\tau}{M} = \frac{\pi^2}{T^2} > (a^2+b^2)^2$, wo T die Schwingungsdauer der Scheibe in der Luft ist. Da nun nach (13)

$a - b > 0$, so folgt

$a^2 + b^2 > 2ab$, mithin erst recht

$\alpha^2 > 2ab$ oder $\frac{\pi}{\alpha^2} < \frac{\pi}{2ab}$, d. h.

$$T < \frac{\pi}{2ab}. \tag{14}$$

Betrachten wir nun die Gleichungen (11), (13) und (14), so erkennen wir zunächst, dass die Scheibe pendelartige Schwingungen um ihre Haupt-Achse ausführen muss. φ nimmt dieselben Werthe an, wenn ich das Argument um $2\varkappa\pi$ vergrössere, wo $\varkappa$ eine ganze Zahl ist. Setze ich das Argument gleich $2ab\,(t + \frac{2\varkappa\pi}{2ab})$, so nimmt φ dieselben Werthe wieder an, wenn eine Zeit von $2T_1 = \frac{2\pi}{2ab}$ Secunden verflossen ist; diese Zeit nennt man die doppelte Schwingungszeit. Als die einfache Schwingungszeit ergiebt sich

$$T_1 = \frac{\pi}{2ab}$$

und so bedeutet denn die Ungleichheit (14) nichts Anderes als:

„die Schwingungsdauer der Scheibe in der Luft ist kleiner als diejenige in der Flüssigkeit."

Die Ungleichung (13) aber sagt uns, dass „die Amplituden in geometrischer Progression abnehmen"; der Exponent der

Reihe bezogen auf die Zeiteinheit ist l, dieselbe Grösse, welche man gewöhnlich das logarithmische Decrement nennt; man darf jedoch nicht übersehen, dass es sich hier auf natürliche Logarithmen bezieht.

Clerk Maxwell giebt in seiner, diesen Gegenstand betreffenden Abhandlung eine etwas abweichende Lösung des Problems, welche daher kommt, dass er den Anfangszustand für $t = 0$ nicht berücksichtigt. Auch ist daselbst Nichts darüber gesagt, weshalb die unendlich vielen reellen Wurzeln von (6) zu vernachlässigen sind.

§ 7.

Es bleibt schliesslich die Aufgabe, aus den beobachtbaren Grössen: Entfernung c_1, logarithmisches Decrement $l = a^2 - b^2$ und Schwingungszeit $T_1 = \frac{\pi}{2ab}$ durch eine geeignete Formel die Grösse des Reibungs-Coefficienten η in absolutem Maasse zu ermitteln.

Hierzu erinnern wir uns der Gleichung

$$\cot mc = \frac{m^4 + \alpha^4}{2\beta m^3}.$$

Ist c_1 sehr klein, so kann gesetzt werden

$$(15) \quad \cot mc = \frac{1}{mc} = \frac{m^4 + \alpha^4}{2\beta m^3} \text{ oder } m^4 - \frac{2\beta}{c} m^2 = -\alpha^4$$

mithin $$m^2 = \frac{\beta}{c} \pm \sqrt{\frac{\beta^2 - c^2\alpha^4}{c^2}} = (a^2 - b^2) \pm 2abi.$$

Ist nun $\beta^2 < c^2\alpha^4$ also

$$c_1 > \frac{R^4 T}{4M} \eta$$

so finden folgende Gleichungen statt

$$a^2 - b^2 = \frac{\beta}{c}$$

$$2ab = \frac{1}{c}\sqrt{\alpha^4 c^2 - \beta^2}$$

oder

$$(16) \quad 2lc_1 M = \left(\frac{R^4\pi}{2}\right)\eta$$

$$(17) \qquad c_1^{\,2}\left(\frac{1}{T^2} - \frac{1}{T_1^{\,2}}\right) = \left(\frac{R^4}{4M}\right)^2 \eta^2.$$

Die Gleichungen (16) und (17) geben uns Aufschluss über das Verhalten von l und T_1 bei sehr kleinen Entfernungen c_1. Hier ist l der Entfernung umgekehrt proportional. Die Schwingungszeit T_1 wird grösser, denn der Factor $\frac{1}{T^2} - \frac{1}{T_1^{\,2}}$ muss wachsen. Wird jedoch

$$c_1 = \frac{R^4 T}{4M} \eta$$

so wird $2ab = 0$, also $T_1 = \infty$, d. h. die periodischen Schwingungen hören auf.

Die beiden sehr einfachen Gleichungen (16) und (17) gelten aber nur dann, wenn die Näherungs-Gleichung (15) erlaubt ist. Diese gilt aber nur für sehr kleine Entfernungen c_1. Da es aber aus Gründen, die später besprochen werden sollen, misslich ist, Beobachtungen für so ausserordentlich kleine Entfernungen anzustellen, so will ich versuchen, eine Formel abzuleiten, welche auch für etwas grössere Entfernungen gilt. Hierzu trenne ich in cot mc Reelles und Imaginäres. Bekanntlich ist, wenn $m = a + bi$ ist

$$\cot mc = - \frac{\sin 2ac - i\,\mathrm{snhp}\ 2bc}{\cos 2ac - \mathrm{cshp}\ 2bc}$$

wo der hyperbolische Sinus

$$\mathrm{snhp}\ 2bc = \frac{e^{2bc} - e^{-2bc}}{2}$$

und der hyperbolische Cosinus

$$\mathrm{cshp}\ 2bc = \frac{e^{2bc} + e^{-2bc}}{2}$$

ist. Es war ferner in § 5 gesetzt:

$$\cot mc = A + Bi.$$

Gleichung (6) zerfällt also in die beiden folgenden

$$(18) \qquad -\frac{\sin 2ac}{\cos 2ac - \mathrm{cshp}\ 2bc} = a\,\frac{(a^2 + b^2)^3 - \alpha^4(a^2 - 3b^2)}{2(a^2 + b^2)^3\beta}.$$

$$(19) \qquad \frac{\mathrm{snhp}\ 2bc}{\cos 2ac - \mathrm{cshp}\ 2bc} = b\,\frac{(a^2 + b^2)^3 - \alpha^4(3a^2 - b^2)}{2(a^2 + b^2)^3\beta}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\frac{\frac{\sin 2ac}{a} + \frac{\mathrm{snhp}\, 2bc}{b}}{\mathrm{cshp}\, 2bc - \cos 2ac} = \frac{2l\alpha^4}{(a^2 + b^2)^3\beta}.$$

Ich löse die linke Seite in eine unendliche Reihe auf:

$$\frac{\sin 2ac}{a} + \frac{\mathrm{snhp}\, 2bc}{b} = 4c - \frac{(2c)^3}{3!}(a^2 - b^2) + \frac{(2c)^5}{5!}(a^4 + b^4) - \frac{(2c)^7}{7!}(a^6 - b^6). \ldots$$

Ich mache nun die Voraussetzung, dass die folgenden Glieder gegen diese vernachlässigt werden dürfen. Das folgende Glied würde sein

$$\frac{(2c)^9}{9!}(a^8 + b^8) < \frac{(2c)^9}{9!}(a^2 + b^2)^4.$$

Da nun nach (14) $(a^2 + b^2)^2 < \alpha^4$, so ist erst recht

$$\frac{(2c)^9}{9!}(a^8 + b^8) < \frac{(2c)^9}{9!}\alpha^8.$$

Soll nun dieses Glied 10 000 mal so klein sein als das erste; also

$$4c = 10000 \cdot \frac{(2c)^9}{9!}\alpha^8$$

so muss c genommen werden

$$c = \frac{\sqrt{0.2835}}{\alpha}.$$

Für meinen Apparat betrug diese Grösse 1.994.

Ferner ist $\mathrm{cshp}\, 2bc - \cos 2ac = 2c^2(a^2 + b^2) - \frac{(2c)^4}{4!}(a^4 - b^4) + \frac{(2c)^6}{6!}(a^6 + b^6). \ldots$

Das nächste Glied $\frac{(2c)^8}{8!}(a^8 - b^8)$ ist schon vollkommen für die berechnete Grösse c zu vernachlässigen. Es ergiebt sich somit

$$\frac{\frac{\sin 2ac}{a} + \frac{\mathrm{snhp}\, 2bc}{b}}{\mathrm{cshp}\, 2bc - \cos 2ac} = \frac{4c\left(1 - \frac{c^2 l}{3} + \frac{c^4 \alpha_1^4}{30}\right)}{2c^2(a^2 + b^2)\left\{1 - \frac{c^2 l}{3} + \frac{c^5 \alpha_1^4}{90}\right\}}.$$

Hierin bedeutet $\alpha_1^4 = \frac{\pi^2}{T_1^2}$. Im Zähler wurde auch das Glied $\frac{(2c)^7}{7!}(a^6 - b^6)$ vernachlässigt; denn für $c = 2$ beträgt es ungefähr 0.00002 des ersten Termes. Mithin ergiebt sich

$$\frac{2\alpha^4 l}{(a^2 + b^2)^3 \beta} = \frac{2(1 + \frac{\alpha_1^4}{45} c^4)}{c(a^2 + b^2)}$$

oder

$$(20) \quad 2lc_1 M = \frac{R^4 \pi}{2} \eta \left(\frac{T}{T_1}\right)^2 \left\{1 + \left(\frac{l T_1}{\pi}\right)^2\right\} \left\{1 + \frac{\alpha_1^4}{45} c^4\right\}.$$

Der Werth der letzten Klammer überstieg für die grösste Entfernung, in der ich beobachtete, nicht 1.001.

Wenn man die Entfernung successive vergrössert, so nimmt dabei das logarithmische Decrement ab; allein selbstverständlich nicht bis ins Unendliche, sondern es nähert sich mit unendlich werdendem c_1 einer festen Grenze. Ich habe die eigenthümliche Beobachtung gemacht, dass es eine Entfernung giebt, für welche das logarithmische Decrement ein Minimum ist. Es ist mir indessen nicht gelungen, diese Entfernung theoretisch zu ermitteln. Auch ändert sich in grösseren Entfernungen das logarithmische Decrement so langsam, dass es schwer zu entscheiden ist, ob die Aenderung desselben einzig und allein von der Aenderung der Entfernung herrührt und nicht von einem etwas tieferen Eintauchen der Scheibe in die Flüssigkeit. Es ergab sich für meinen Apparat in der Entfernung

$c_1 = 4{,}07$ mm	$L = 0.0\,59\,614$
4,97	53 187
6,14	53 352
7,01	55 506
7,89	56 112
8,77	56 859
9,65	56 844
13,45	56 974

L bedeutet das unmittelbar beobachtete logarithmische Decrement der Amplitude auf briggische Logarithmen bezogen.

Für grössere Entfernungen lässt sich eine ziemlich einfache Formel ableiten. Sobald nämlich 2bc einen Werth annimmt, der etwa 10 übersteigt, ist nicht nur snhp 2bc und cshp 2bc als vollkommen gleich in Rechnung zu ziehen, sondern es ist auch gegen diese Grössen sin 2ac und cos 2ac zu vernachlässigen. Dann ergeben aber die Formeln (18) und (19) folgende Beziehungen:

$$(18^a) \qquad 0 = (a^2 + b^2)^3 + \alpha^4(a^2 - 3b^2).$$

$$(19^a) \qquad 1 = b\,\frac{\alpha^4(3a^2 - b^2) - (a^2 + b^2)^3}{(a^2 + b^2)^3 \cdot 2\beta}.$$

Aus (18^a) folgt

$$(a^2 + b^2)^3 = \alpha^4(3b^2 - a^2).$$

Dadurch wird (19^a)

$$2\beta(a^2 + b^2)^3 = 4\alpha^4 b l.$$

Nun ist $(a^2 + b^2)^2 = \alpha_1{}^4 + l^2$, wo $\alpha_1{}^4 = \frac{\pi^2}{T_1{}^2}$ ist. Für sehr kleine logarithmische Decremente kann mit genügender Annäherung gesetzt werden

$$(a^2 + b^2) = \alpha_1{}^2$$

und es ergiebt sich

$$\alpha_1{}^6\beta = 2\alpha^4 b l.$$

Aus (18^a) folgt ferner

$$0 = (a^2 + b^2)^3 + \alpha^4(a^2 + b^2) - 4\alpha^4 b^2$$

also $$4b^2 = \frac{\alpha_1{}^6 + \alpha^4\alpha_1{}^2}{\alpha^4} = \alpha_1{}^2\left(1 + \left(\frac{\alpha_1}{\alpha}\right)^4\right)$$

mithin $$b = \frac{\alpha_1}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha_1}{\alpha}\right)^4}.$$

Es ergiebt sich also

$$\alpha_1{}^6\beta = \alpha^4\alpha_1 l\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha_1}{\alpha}\right)^4} \text{ oder}$$

$$\alpha_1{}^5\beta = l\sqrt{\alpha^4 + \alpha_1{}^4}\,\alpha^2 \text{ oder}$$

$$\frac{R^4\pi\sqrt{\eta D}}{4M}\,\frac{\pi^2}{T_1{}^2}\sqrt{\frac{\pi}{T^1}} = \frac{l\pi^2}{T^2 T_1}\sqrt{T^2 + T_1{}^2}$$

also schliesslich

$$(21) \qquad 2M/\left(\frac{T_1}{T}\right)^2\sqrt{\frac{T^2 + T_1{}^2}{\pi T_1}} = \frac{R^4\pi}{2}\cdot\sqrt{\eta D}.$$

Da bei grossen Entfernungen c_1 das logarithmische Decrement klein ist, so kann T_1 mit grosser Genauigkeit bestimmt werden. Wird bei kleinen Entfernungen c_1 beobachtet, so bleibt diese Bestimmung immer ungenau, da die Amplituden nach kurzer Zeit schon sehr klein werden.

Die Formel (20) hat Aehnlichkeit mit der von Maxwell, die Formel (21) mit der von O. E. Meyer angegebenen. In beiden Fällen treten jedoch an Stelle von unendlichen Reihen geschlossene Ausdrücke, welche die Rechnung vereinfachen.

§ 8.

Ich will nun das allgemeine Problem behandeln, bei dem vorausgesetzt wird, dass die Flüssigkeit an der Scheibe und am Gefässboden gleite. Für die Bewegung eines Flüssigkeitstheilchens im Innern bleibt selbstverständlich die Gleichung erhalten

$$D\frac{\partial\psi}{\partial t} = \eta\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}.$$

Ebenso bleibt die Bedingung erhalten, dass für $t = 0$ $\varphi = \Phi_0$, und $\psi = 0$ und $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ sein soll.

Betrachten wir ein Flüssigkeits-Element der letzten Schicht, also in der Tiefe $x = c_1$, und stellen seine Bewegungs-Gleichung auf. Auf die obere ebene Fläche wirkt folgendes Drehungsmoment der Reibung:

$$-\eta . r\, dr\, d\varphi . r . r\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{x=c_1-dx} = -\eta\, r^3\, dr\, d\varphi\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{c_1} - dx\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)_{c_1}\right\}$$

Auf die untere ebene Fläche wirkt folgendes Drehungsmoment der äusseren Reibung: $-r\psi Er\,.\,r\,dr\,d\varphi$ wo E die Constante der äusseren Reibung ist. Mithin besteht für $x = c_1$ folgende Gleichung

$$r^3\,dr\,.\,d\varphi\,.\,dx\,.\,D\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\eta\, r^3\, dr\, d\varphi\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{c_1} - \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)_{c_1} dx\right\}$$
$$- r^3\,\psi\,E\,dr\,d\varphi$$

oder

$$D\,dx\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\eta\frac{\partial\psi}{\partial x} + \eta\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \psi E.$$

Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn die Terme, welche unendlich klein derselben Ordnung sind, für sich verschwinden; also muss für $x = c_1$:

$$D \frac{\partial \psi}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \text{ und}$$

$$\eta \frac{\partial \psi}{\partial x} = - \psi E$$

sein. Ich betrachte jetzt ein Theilchen der obersten Schicht. Ist ψ_1 die Geschwindigkeit der Scheibe, so wirkt auf die obere ebene Fläche folgendes Drehungsmoment der äusseren Reibung

$$- r \, dr \, d\varphi \, . \, r \, . \, r (\psi - \psi_1) E$$

Auf die untere ebene Fläche wirkt folgendes Drehungsmoment der inneren Reibung

$$r^3 dr \, d\varphi \, . \, \eta \, . \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{x = dx}$$

Es ergiebt sich also folgende Bewegungsgleichung:

$$dx \, . \, r^3 \frac{\partial \psi}{\partial t} \, . \, D \, . \, dr \, . \, d\varphi = - r^3 \, dr \, . \, d\varphi \, . (\psi - \psi_1) E$$

$$+ r^3 \, dr \, d\varphi \, \eta \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_0 + dx \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right)_0 \right\}.$$

Diese Gleichung zerfällt in die beiden folgenden

$$D \frac{\partial \psi}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \text{ und}$$

$$(\psi - \psi_1) E = + \eta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_0.$$

Die Bewegungsgleichung der Scheibe lautet:

$$M \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - \tau \varphi + \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi \, . \, (\psi_1 - \psi) r^3 E$$

Unter Berücksichtigung der eben entwickelten Bedingung für $x = 0$ erhalten wir als die Bewegungsgleichung der Scheibe

$$M \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - \tau \varphi + \left(\frac{R^4 \pi}{2}\right) \eta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_0.$$

Führen wir dieselben Abkürzungen wie früher ein, setzen also

$$\beta = \frac{\pi R^4 \sqrt{\eta D}}{4 M}, \quad \alpha^4 = \frac{\tau}{M}, \quad c_1 = c \sqrt{\frac{\eta}{D}} \text{ und } x = y \sqrt{\frac{\eta}{D}}$$

so erhalten wir folgendes System von Gleichungen:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \tag{22}$$

Für $y = c$ soll

$$\frac{\sqrt{D\eta}}{E} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_c = -\psi \tag{23}$$

sein; setze ich abkürzend $\frac{\sqrt{D\eta}}{E} = \zeta$

so soll $$\zeta \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\psi$$

sein. Für $y = 0$ soll

$$\psi - \psi_1 = \zeta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_0 \tag{24}$$

sein; $\psi_1 = \frac{d\varphi}{dt}$ soll aber der Gleichung genügen

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\alpha^4 \varphi + 2\beta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_0. \tag{25}$$

Endlich soll für $t = 0$

$$\varphi = \Phi_0\,, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0, \; \psi = 0 \tag{26}$$

sein.

§ 9.

Zunächst ergiebt sich wie oben als vollständige Lösung von (22)

$$\psi = + \Sigma (A \sin my + B \cos my)\, e^{-m^2 t}$$

wo A, B, m Constanten sind.

Für $y = c$ soll (23) erfüllt sein; also

$$-\Sigma (A \sin mc + B \cos mc)\, e^{-m^2 t} = + \zeta \Sigma (m A \cos mc - m B \sin mc)\, e^{-m^2 t}.$$

Da diese Bedingung für alle Zeiten gilt, so muss

$A (m\zeta \cos mc + \sin mc) = B (m\zeta \sin mc - \cos mc)$ sein, mithin

$$A = B \frac{m\zeta \sin mc - \cos mc}{m\zeta \cos mc + \sin mc} = -B F(m).$$

Es folgt

$$\psi = \sum B \frac{m\zeta \cos m(c-y) + \sin m(c-y)}{m\zeta \cos mc + \sin mc} e^{-m^2 t}$$

und

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \sum B e^{-m^2 t} \frac{m^2 \zeta \sin m(c-y) - m \cos m(c-y)}{m\zeta \cos mc + \sin mc}$$

also folgt

$$(\psi)_0 = \sum B e^{-m^2 t} \text{ und}$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_0 = \sum B e^{-m^2 t} m \frac{m\zeta \sin mc - \cos mc}{m\zeta \cos mc + \sin mc}$$

$$= -\sum B m F(m) e^{-m^2 t}$$

Nun soll für $y = 0$ (24) erfüllt sein, d. h.

$$\psi_0 - \psi_1 = \zeta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_0$$

also

$$\psi_1 = \frac{d\varphi}{dt} = \psi_0 - \zeta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_0$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sum B e^{-m^2 t} + \zeta \Sigma B m F(m) e^{-m^2 t}$$

$$= \sum B e^{-m^2 t} (1 + \zeta m F(m))$$

$$= \sum B e^{-m^2 t} G(m)$$

wenn $G(m) = 1 + \zeta m F(m)$ ist.

Hieraus folgt

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\sum B m^2 G(m) e^{-m^2 t}$$

$$\varphi = \gamma - \sum \frac{B}{m^2} G(m) e^{-m^2 t}$$

wo γ die Integrationsconstante ist.

Damit also (25) erfüllt ist, muss

$$-\sum B m^2 G(m) e^{-m^2 t} = -\alpha^4 \gamma + \alpha^4 \sum \frac{B}{m^2} G(m) e^{-m^2 t}$$

$$- 2\beta \sum B m F(m) e^{-m^2 t}$$

sein.

Diese Bedingung gilt für alle Werthe von t; sie ist nur erfüllt, wenn

$$-\alpha^4\gamma = 0, \text{ also } \gamma = 0 \text{ ist und}$$

$$-m^2G(m) - \frac{\alpha^4}{m^2}G(m) + 2\beta m F(m) = 0$$

ist; diese letzte Gleichung verlangt, dass

$$F(m) = \frac{m^4 + \alpha^4}{2\beta m^3} G(m) \tag{27}$$

Diese Bedingung geht für $E = \infty$, also für $\zeta = 0$ genau in die Bedingung (6) über.

Ich will das allgemeine Problem nicht weiter verfolgen, sondern die Annahme machen, dass die Flüssigkeit an der Scheibe haftet und unter dieser Voraussetzung die Aufgabe zu Ende führen.

Dann habe ich für $y = 0$ die einfache Bedingung, dass

$$\psi_0 = \frac{d\varphi}{dt} \tag{28}$$

ist; für φ gilt die Gleichung (25). Diese sagt dann aus, dass

$$-\sum m^2 B e^{-m^2t} = \alpha^4 \sum \frac{B}{m^2} e^{-m^2t} - 2\beta \sum B c^{-m^2t} m F(m)$$

ist. Hieraus folgt

$$m^2 + \frac{\alpha^4}{m^2} = -2\beta m \frac{m\zeta - \cot mc}{1 + m\zeta \cot mc}$$

oder

$$\frac{\cot mc - m\zeta}{1 + m\zeta \cot mc} = \frac{m^4 + \alpha^4}{2\beta m^3}. \tag{29}$$

Für $\zeta = 0$ ergiebt sich wieder Bedingung (6).

Endlich soll für $t = 0$

$$\psi = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \varphi = \Phi_0$$

sein; also muss

$$\Sigma B = 0 \tag{30a}$$

$$\Phi_0 = -\sum \frac{B}{m_2} \tag{30b}$$

$$\sum B \frac{m\zeta \cos m(c-y) + \sin m(c-y)}{m\zeta \cos mc + \sin mc} = 0 \tag{30c}$$

sein.

Um nun B selbst zu bestimmen, multiplicire ich (30^c) einmal mit $\cos n\,(c-y)\,dy$, das andere Mal mit $\sin n\,(c-y)\,dy$ und integrire jedesmal von 0 bis c. Zugleich dividire ich noch mit

$$n\zeta \cos nc + \sin nc = N$$

und setze analog

$$\zeta m \cos mc + \sin mc = M.$$

Es ergeben sich folgende beiden Gleichungen:

$$(31)\quad 0 = \sum B \left\{ \frac{\zeta m}{M.N} \int_0^c \cos m\,(c-y) \cos n\,(c-y)\,dy \right.$$
$$\left. + \frac{1}{M.N} \int_0^c \sin m\,(c-y) \cos n\,(c-y)\,dy \right\}$$

$$(32)\quad 0 = \sum B \left\{ \frac{\zeta m}{M.N} \int_0^c \cos m\,(c-y) \sin n\,(c-y)\,dy \right.$$
$$\left. + \frac{1}{M.N} \int_0^c \sin m\,(c-y) \sin n\,(c-y)\,dy \right\}.$$

Indem ich nun die Werthe berücksichtige, welche die Integrale annehmen, wenn $m \gtrless n$ ist und wenn $m = n$ ist, erhalte ich 2 neue Gleichungen (31^a) und (32^a). Von diesen multiplicire ich (31^a) mit $n\zeta$ und addire die entstehende Gleichung zu (32^a). Dann ergiebt sich nach passender Umformung die Bedingung, dass

$$0 = \frac{\alpha^4}{2\beta n^2} \sum \frac{B_i}{m_i^2} - \frac{1}{2\beta} \sum B_i$$
$$i = 1, 2, \ldots \varkappa-1, \varkappa+1, \ldots \qquad i = 1, 2 \ldots \varkappa-1, \varkappa+1 \ldots$$
$$- B_\varkappa \frac{n^4 + \alpha^4}{4\beta n^4} + B_\varkappa \frac{n^2\zeta^2 c + \zeta + c}{2\,(n\zeta \cos nc + \sin nc)^2}.$$

Nun ist nach (30)

$$\sum \frac{B_i}{m_i^2} = - \frac{B_\varkappa}{n^2} - \Phi_0$$
$$\Sigma B_i = - B_\varkappa$$

also folgt

$$B_\varkappa \left\{ \frac{\alpha^4}{2\beta n^4} + \frac{1}{2\beta} + \frac{n^4 + \alpha^4}{4\beta n^4} - \frac{n^2\zeta^2 c + \zeta + c}{2(n\zeta \cos nc + \sin nc)^2} \right\} = -\frac{\alpha^4}{2\beta n^2} \Phi_0$$

Hieraus folgt

$$B_\varkappa = -\frac{\alpha^4 \Phi_0}{n^2 + \frac{n^4 + 3\alpha^4}{2n^2} - \frac{\beta n^2 (n^2\zeta^2 c + \zeta + c)}{(n\zeta \cos nc + \sin nc)^2}}$$

Hierdurch sind alle Constanten bestimmt, also ist das Problem mathematisch gelöst.

§ 10.

Um wiederum über die Grössen m einigen Aufschluss zu erhalten, betrachte ich die Gleichung, durch welche sie bestimmt werden.

$$\frac{\cot mc - m\zeta}{1 + m\zeta \cot mc} = \frac{m^4 + \alpha^4}{2\beta m^3} \tag{29}$$

Es lässt sich auch von dieser Gleichung nachweisen, dass sie neben unendlich vielen reellen höchstens 4 complexe Wurzeln haben kann. Der Beweis ist dem analog, den O. E. Meyer im 63. Bande des Crelle'schen Journales für die Gleichung (6[a]) geliefert hat.

Zum Beweise schreibe ich (29)

$$m \cot mc = \frac{(m^4 + \alpha^4) + 2\zeta\beta m^4}{2\beta m^2 - \alpha^4\zeta - m^4\zeta} \tag{29a}$$

Ich löse nun die Cotangente in Partialbrüche auf und breche nach dem (n + 1)ten Gliede ab. Ich erhalte

$$m\left\{\frac{1}{mc} - \frac{2mc}{(1\pi)^2 - m^2c^2} - \frac{2mc}{(2\pi)^2 - m^2c^2} - \cdots - \frac{2mc}{(n\pi)^2 - m^2c^2}\right\} - \frac{m^4(1 + 2\zeta\beta) + \alpha^4}{2\beta m^2 - \alpha^4\zeta - m^4\zeta} = 0. \tag{29b}$$

Bringe ich diese Gleichung auf gleichen Nenner, so entsteht eine Gleichung vom (n + 2)ten Grade in m^2, welche also (n + 2) Wurzeln m^2 besitzt. Ist nun δ eine unendlich kleine Grösse, so wird die linke Seite unendlich für $m^2 = 0$; ferner

$$-\infty \text{ für } m^2 = \frac{(1\pi)^2 - \delta}{c^2}, \quad +\infty \text{ für } m^2 = \frac{(1\pi)^2 + \delta}{c^2}$$

$$-\infty \text{ für } m^2 = \frac{(2\pi)^2 - \delta}{c^2}, \quad +\infty \text{ für } m^2 = \frac{(2\pi)^2 + \delta}{c^2}$$

u. s. w. Da nun die Function im Uebrigen stetig verläuft, so müssen zwischen

$$c^2 m^2 = 0, \ (1\pi)^2, \ (2\pi)^2, \ \ldots \ (n\pi)^2$$

Nullwerthe der Function (29^b) existiren; dies sind gerade n Werthe. Mithin bleiben für complexe Werthe von m^2 nur 2 Wurzeln übrig: es giebt also höchstens 4 complexe Wurzeln m. Da nun alle Schlüsse erhalten bleiben, so gross ich auch n nehmen mag, so ist der Beweis geliefert für jeden gewünschten Grad der Näherung.

Es bleibt nun noch zu zeigen übrig, dass es in der That 4 complexe Wurzeln giebt. Die Form

$$\frac{\cot mc - m\zeta}{1 + m\zeta \cot mc} = \frac{m^4 + \alpha^4}{2\beta m^3} \tag{29}$$

zeigt, dass der Gleichung, wenn $a + bi$ eine Wurzel ist, auch $m = -a - bi$ genügt; ebenso müssen $m = a - bi$ und $m = -a + bi$ Wurzeln sein. Es bleiben demnach nur die beiden Fälle zu untersuchen übrig, in denen 0 oder 4 complexe Wurzeln auftreten.

Hierzu construire ich mir die beiden Curven

$$y = \frac{2\beta m^3}{m^4 + \alpha^4} \text{ und}$$

$$z = \frac{1 + m\zeta \cot mc}{\cot mc - m\zeta}$$

Die Abscissen der Durchschnittspunkte sind Wurzeln von (29). Es ist

$$\frac{dy}{dm} = 2\beta m^2 \frac{3\alpha^4 - m^4}{(m^4 + \alpha^4)^2}$$

$$\frac{d^2 y}{dm^2} = \frac{m^8 - 12\alpha^4 m^4 + 3\alpha^4}{(m^4 + \alpha^4)^3} 4\beta.$$

Hieraus geht hervor, dass die algebraische Curve die Abscissenachse im Anfangspunkte und im Unendlichen berührt; zuerst convex gegen dieselbe ansteigend besitzt sie in $m = \sqrt[4]{6 - \sqrt{33}}\,\alpha = 0.71092\alpha$ einen Inflexionspunkt, nach welchem

sie der Abscisse ihre concave Seite zukehrt. In $m = \alpha \sqrt[4]{3} = 1.316\alpha$ erreicht sie ihr Maximum, fällt von dem Inflexionspunkte $m = \sqrt[4]{6 + \sqrt{33}}\,\alpha$ an wieder convex zur Abscisse und nähert sich dieser asymptotisch.

Die Curve z besteht aus unendlich vielen Zweigen; es ist nämlich $z = 0$ für $\zeta m \cot mc = -1$ oder für

$$\cot mc = -\frac{1}{m\zeta}. \tag{29c}$$

(29d) Es ist $z = \infty$ für $\cot mc = m\zeta$.

Es ist ferner

$$\frac{dz}{dm} = \frac{(c + \zeta) + \zeta c^2 m^2}{(\cos mc - \zeta m \sin mc)^2}.$$

$\frac{dz}{dm}$ verschwindet für keinen reellen Werth von m und bleibt stets positiv, wird aber unendlich für $\cot mc = m\zeta$.

Hieraus geht hervor, dass die Curve z einen ganz ähnlichen Verlauf hat wie die Tangentencurve. Um aber die Punkte, für die sie unendlich und Null wird, etwas näher zu betrachten, construire ich die Curven

$$u = \operatorname{tg} mc$$
$$v = -m\zeta$$
$$w = \frac{1}{m\zeta}.$$

Die Curve v ist eine auf der negativen Seite der Abscisse verlaufende Grade, welche durch den Anfangspunkt geht; die Curve w ist eine sich an die positive Ordinate und Abscisse anlegende gleichseitige Hyperbel. Die Abscissen der Schnittpunkte von u und v sind diejenigen der Nullpunkte; die Abscissen der Schnittpunkte von u und w sind diejenigen der Unendlichkeitspunkte der Curve z. Es ist leicht ersichtlich, dass sich die Abscissen der Nullpunkte immer mehr den Werthen

$$\frac{\pi}{2c}, \frac{3\pi}{2c}, \frac{5\pi}{2c} \cdots \frac{2n+1}{2c}\pi$$

nähern, dagegen die Abscissen der Unendlichkeitspunkte immer mehr den Werthen

$$\frac{\pi}{c}, \frac{2\pi}{c}, \frac{3\pi}{c} \ldots \frac{(2n+1)}{c}\pi.$$

Es ist nun ohne Weiteres klar, dass die algebraische Curve in dem Theile, in welchem sie beständig fällt, die einzelnen Zweige der transcendenten Curve je einmal schneiden muss; die Möglichkeit eines mehrfachen Durchschnittes ist nur in dem Theile der algebraischen Curve vorhanden, in welchem sie steigt und einen Inflexionspunkt besitzt. Es ist aber ferner sofort einleuchtend, dass diese beiden Schnittpunkte zusammen mit den beiden ihnen entsprechenden im dritten Quadranten diejenigen 4 Wurzeln liefern, welche möglicherweise imaginär werden können.

Lege ich an die einzelnen Zweige der transcendenten Curve in den Punkten, in denen sie die Abscisse schneiden, Tangenten, so liegen die einzelnen Zweige stets ganz links von diesen Linien. Die algebraische Curve kann nun einen solchen Zweig nur dann in mehr als einem Punkte schneiden, wenn die Tangente im Inflexionspunkte stärker gegen die Abscisse geneigt ist, als diese Tangenten; es muss $\operatorname{tg}\varphi > \operatorname{tg}\psi$ sein, wo φ und ψ die Winkel sind, unter denen die fraglichen Tangenten die Abscisse schneiden. Diese Bedingung reeller Schnittpunkte ist nothwendig, aber nicht hinreichend.

Es ist $\operatorname{tg}\varphi = \left(\frac{dy}{dm}\right)_{m = 0.71\,\alpha} = \frac{2\beta}{\alpha^2} 0.88010$

Die Tangente im ersten Curvenzweige schliesst mit der Abscisse folgenden Winkel ein:

$$\operatorname{tg}\psi = \left(\frac{dz}{dm}\right)_0 = \zeta + c$$

Da sich die Abscissen der Nullpunkte immer mehr den Werthen

$\frac{\pi}{2c}, \frac{3\pi}{2c}, \ldots$ nähern, so nähert sich $\cos mc$ immer mehr der

Null, sin mc immer mehr der Eins; also für die einzelnen Zweige tg ψ immer mehr dem Werthe

$$\frac{(\zeta + c) + \zeta^2 c \left(\frac{2n+1}{2c}\pi\right)^2}{\zeta^2\left(\frac{2n+1}{2c}\pi\right)^2} = c + \frac{(\zeta + c)}{\zeta^2\left(\frac{2n+1}{2c}\pi\right)^2}$$

tg ψ nähert sich immer mehr dem Werthe c. Ist somit $c > \frac{2\beta}{\alpha^2}\,0.8801$, so treten die vier reellen Schnittpunkte nicht auf, d. h. es existiren dann stets vier complexe Wurzeln. Für meinen Apparat betrug diese Grösse 0.0273; also müssen, wenn

$$c_1 > 0.0273\sqrt{\frac{\eta}{D}}$$

ist, stets vier complexe Wurzeln existiren. Die Entfernungen, in denen beobachtet wurde, waren sämmtlich grösser: mithin ist der Beweis für meine Versuche geliefert.

Wie gross nun die Wurzeln m sein mögen, interessirt uns nicht; wir wollen nur die kleinste wissen. Setzen wir:

$$\cot mc = f(m) = \frac{m^4(1 + 2\zeta\beta) + \alpha^4}{2\beta m^3 - m\zeta\alpha^4 - \zeta m^5}$$

so überschen wir leicht, dass $f(0) = -\infty$ wird und zwar unendlich wie $\frac{1}{m\zeta}$. Es ist ferner $f(\infty) = 0$. Die Curve f(m) steigt von $-\infty$ bis Null an, welchen letzteren Werth sie erst im Unendlichen erreicht, da die Gleichung

$$m^4(1 + 2\zeta\beta) + \alpha^4 = 0$$

keine reellen Wurzeln besitzt. In welcher Weise demnach auch die Curve f(m) verlaufen möge: sie kann den ersten Zweig der Cotangenten-Curve erst schneiden, nachdem dieser selbst die Abscisse durchschnitten hat; d. h. die kleinste Wurzel m ist jedenfalls grösser als $\frac{\pi}{2c}$. Ferner lehrt ein Blick auf die Constanten B, dass dieselben immer kleiner werden, je grösser m ist.

Hat somit c_1 einen endlichen Werth, so verschwinden mit wachsender Zeit t alle Glieder in dem Ausdruck für ψ, welche von den reellen Constanten m herrühren.

Die weitere Durchrechnung ist genau so wie in § 4 und § 5, nur dass an die Stelle von cot mc der Ausdruck

$$\frac{\cot mc - m\zeta}{1 + m\zeta \cot mc}$$

tritt. Es gelten für φ, $\frac{d\varphi}{dt}$, ψ genau dieselben Endformeln.

§ 11.

Es bleibt übrig, Formeln herzuleiten, nach denen η und ζ berechnet werden können.

Der Fall, bei welchem die Flüssigkeit an der Scheibe, nicht aber am Boden haftet, tritt meist ein, wenn man eine Flüssigkeit sich über einer anderen specifisch schwereren bewegen lässt. Dann wird am besten die Dicke der zu untersuchenden Flüssigkeitsschicht sehr klein genommen, so dass annäherungsweise gesetzt werden kann

$$\cot mc = \frac{1}{mc}$$

dann wird (29)

$$\frac{\frac{1}{mc} - m\zeta}{1 + \frac{m\zeta}{mc}} = \frac{m^4 + \alpha^4}{2\beta m^3} \quad \text{oder}$$

$$\frac{1 - c\zeta m^2}{c + \zeta} = \frac{m^4 + \alpha^4}{2\beta m^2} \quad \text{oder}$$

$$m^4(c + \zeta + 2c\beta\zeta) - 2\beta m^2 = -(c + \zeta)\,\alpha^4.$$

Hieraus folgt

$$m^2 = \frac{\beta}{c + \zeta + 2c\beta\zeta} \pm \sqrt{\frac{\beta^2 - (c + \zeta)\alpha^4(c + \zeta + 2c\beta\zeta)}{(\zeta + c + 2\beta\zeta)^2}}$$

Ferner ist $m^2 = a^2 - b^2 \pm 2abi$.

Sollen periodische Schwingungen möglich sein, so muss

$$(c + \zeta)\,(c + \zeta + 2c\beta\zeta)\,\alpha^4 > \beta^2$$

sein. Ist diese Bedingung erfüllt, so muss gesetzt werden

(33) $$l = \frac{\beta}{(c + \zeta + 2\beta\zeta c)}$$

$$(34) \qquad \frac{\pi}{T_1} = \sqrt{\frac{(\zeta + c)\,(c + \zeta + 2\beta\zeta c)\,\alpha^4 - \beta^2}{(c + \zeta + 2\beta\zeta c)^2}}$$

Es ist aber $\zeta = \frac{\sqrt{D\eta}}{E}$; mithin folgt aus (33)

$$l\left(c_1\sqrt{\frac{D}{\eta}} + \frac{\sqrt{D\eta}}{E} + 2\frac{D\beta}{E}\right) = \beta$$

$$l\left\{\frac{1}{E} + \frac{c_1}{\eta} + \frac{\pi R^4 D}{2ME}\right\} = \frac{\pi R^4}{4M}$$

Es ist also

$$\frac{l}{E}\left(1 + \frac{\pi R^4 D}{2M}\right) = \frac{R^4\pi}{4M} - \frac{lc_1}{\eta}$$

Nun ist nach Formel (16)

$$\frac{R^4\pi}{4M} = \frac{l' c_1}{\eta}$$

wo l' das logarithmische Decrement für die Entfernung c_1 ist, wenn die Flüssigkeit auch am Gefässboden haftet. Also ergiebt sich

$$(35) \qquad \frac{l}{E}\left(1 + \frac{R^4\pi D}{2M}\right) = \frac{c_1}{\eta}\,(l' - l)$$

Soll E einen positiven Werth haben, soll also Gleiten stattfinden, so muss $l' > l$ sein, ein Umstand, welcher leicht experimentell geprüft werden kann. So wurde z. B. für Quecksilber und Wasser gefunden in der Entfernung $c_1 = 1{,}75$ mm

$$l = 0.0017\ ,\ l' = 0.0016$$

Mithin muss Quecksilber und Wasser an einander haften.

Um aber den Coefficienten der inneren und äusseren Reibung für Flüssigkeiten zu ermitteln, welche an der Scheibe und am Boden gleiten, benützt man am besten Flüssigkeitsschichten von bedeutender Tiefe. Die Berechnung erfolgt nach Gleichung (27)

$$F(m) = \frac{m^4 + \alpha^4}{2\beta m^3}\,G(m)$$

wo

$$F(m) = \frac{\cot mc - m\zeta}{1 + m\zeta\cot mc}$$

und $$G(m) = 1 + m\zeta\, F(m)$$

ist. Hat c einen bedeutenden Werth, so kann mit genügender Annäherung gesetzt werden

$$\cot mc = -i = -\sqrt{-1}$$

dann ergiebt sich

$$F(m) = -\frac{i + m\zeta}{1 - im\zeta} = -i$$

und $$G(m) = 1 - mi\zeta$$

Dann wird (27)

$$-i = (A + Bi)\,(1 - i(a + bi)\zeta)$$

und hieraus folgt

(36) $$0 = A + \zeta\,(b\,A + a\,B)$$
$$-1 = B + \zeta\,(b\,B - a\,A)$$

wo A und B die in § 5 angegebenen Werthe haben. Eliminiren wir ζ, so ergiebt sich

$$a\,B + b\,A = -a\,(A^2 + B^2)$$

Nach gehöriger Vereinfachung ergiebt sich hieraus

(37) $$\sqrt{\eta D} = \frac{2M}{R^4\pi^2 T^2 T_1} \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} \cdot \frac{K_1 \cdot K_2}{K_3}$$

wo $$K_1 = T^2 T_1{}^2 l^2 + (T_1 - T)^2\,\pi^2$$
$$K_2 = T^2 T_1{}^2 l^2 + (T_1 + T)^2\,\pi^2$$
$$K_3 = \pi^2\,(T_1{}^2 - T^2) - T^2 T_1{}^2 l^2$$

ist. Die Grössen a und $a^2 + b^2$ habe ich absichtlich stehen lassen, um die Formel nicht noch mehr zu compliciren.

Hat man $\sqrt{D\eta}$ berechnet, so folgt aus (36)

$$\zeta = -\frac{A}{b\,A + a\,B} \text{ also}$$

(38) $$E = -\frac{\sqrt{D\eta}\,(b\,A + a\,B)}{A} \text{ also}$$

$$E = \frac{(a^2 + b^2)\,\pi\,K_3\,\sqrt{D\eta}}{a\,T_1{}^3\,T^2\,\{(a^2 + b^2)^3 + \alpha^4\,(a^2 - 3b^2)\}}.$$

§ 12.

Der praktischen Ausführung des durchgeführten Experimentes stellen sich zwei wesentliche Schwierigkeiten entgegen; die erste besteht darin, die sehr kleine Entfernung der Scheibe vom Gefässboden möglichst scharf zu messen, die zweite

darin, die Temperatur der sehr dünnen Flüssigkeitsschicht genau zu bestimmen. Ueber die erste Schwierigkeit half die Einrichtung meines Apparates leicht hinweg; die zweite aber war um so schwerer zu besiegen, als von vorn herein ersichtlich war, dass sich die Temperatur einer so dünnen Flüssigkeitsschicht während des Versuches ändert.

Der Apparat war im Wesentlichen folgender. Eine Glasscheibe G ist an dem Haken H so aufgehängt, dass der Draht genau die Verlängerung ihrer Hauptachse bildet. Um ihr Trägheitsmoment zu vermehren, ist sie mit einer dicken Bleischeibe B von gleichem Radius verbunden, so zwar, dass zwischen Glasscheibe und Bleiplatte ein Zwischenraum von 19,45 mm Höhe bleibt. Die Schwingungen der Scheibe werden mittels Fernrohr, Spiegel und Scala beobachtet.

Der übrige Theil des Apparates dient zur Aufstellung des Gefässes mit der Flüssigkeit und zur Messung der Entfernung von Glasscheibe und Gefässboden. Um die Glasplatte P mit der Glasscheibe coaxial aufzustellen, zeichnete ich mir auf ersterer einen mit ihr concentrischen Kreis vom Radius der Glasscheibe; wurde nun der Apparat so lange verschoben, bis die Glasscheibe jenen Kreis grade deckte, so fiel die Hauptachse der Platte mit der des Drahtes zusammen. Auf diese zuvor horizontal gestellte Platte wurde das Gefäss mit der zu untersuchenden Flüssigkeit aufgesetzt. Da sein Boden fast genau so gross war wie die Platte P, so war mit obiger Manipulation zugleich erreicht, dass die Hauptachse der Scheibe dieselbe war wie die des Gefässes. Die Platte P konnte nun durch den Messingcylinder A gehoben und gesenkt werden, welch letzterer durch Drehen an der Schraube S_2 in die Hülse E gezogen wird. Eine Drehung an der Scheibe S_2' arretirt den Messingcylinder A an beliebiger Stelle.

Mit der Platte P wird gleichzeitig ein Mikroskop F gehoben und gesenkt, in welchem man die Scala Sc erblickt. Eine Hebung der Platte P bewirkt im Mikroskop gleichfalls eine Veränderung des Bildes.

Wird nun das mit Flüssigkeit gefüllte Glasgefäss auf die Platte P aufgesetzt und letztere so weit gehoben, bis die Glasscheibe den Gefässboden grade berührt, so verschiebt sich von jenem Punkte an bei weiterer Hebung die Scala nicht mehr

gegen das Fadenkreuz des Mikroskops. Bringt man nun das Fadenkreuz zur Coincidenz mit einem Scalentheile, so hat man es in der Gewalt, das Gefäss um eine beliebige Anzahl Theilstriche zu senken, welche dann gleich ist der Entfernung zwischen Glasscheibe und Gefässboden. Man hat also nur nöthig jene Scala recht genau auszumessen, um die Entfernung c_1 so genau wie möglich zu erhalten. Durch mehrfache Vergleichung mit einem guten nach Millimetern getheilten Maassstabe ergab sich, dass

$$1 \text{ Scalentheil} = 0{,}0974 \text{ mm}$$

ist.

Um ferner die Glasscheibe recht genau horizontal aufhängen zu können, war über der Bleiplatte ein auf einem Arme verschiebbares, um die Scheibenachse drehbares Bleigewicht angebracht. Dasselbe wurde so lange verschoben, bis die in eine untergestellte Flüssigkeit gesenkte Scheibe die Oberfläche derselben gleichzeitig benetzte. Hierauf wurde das Gewicht durch Schräubchen an dieser Stelle befestigt und die Schwingungsdauer der Scheibe in der Luft bestimmt. In die Achse der Scheibe war ein kleiner Magnet von 32,0 mm Länge eingeschraubt; sollte die Scheibe schwingen, so wurde ein Pol eines kräftigen Stabmagneten dem Nordpole des kleinen Magneten genähert. Die Schwingungen in der Luft wurden bestimmt, als die Scheibe in dem leeren Glasgefässe schwang, bedeckt durch eine Glasscheibe mit kreisrundem Ausschnitt für die Scheibenachse. Der Spiegel wurde ausserdem durch ein Häuschen aus Pappe gegen Luftströmungen geschützt. Unter diesen Vorsichtsmassregeln ergab sich eine Schwingungsdauer von

$$T = 17{,}1231 \text{ Secunden.}$$

Hierauf wurden an einem feinen Platindrahte zwei gleich grosse cylindrische Gewichte genau diametral einander gegenüber aufgehängt, deren Trägheitsmoment um die Hauptachse bekannt war. Die unter denselben Vorsichtsmassregeln vorgenommene Bestimmung der Schwingungsdauer des Systems ergab $T' = 19{,}3741$ Secunden. Hieraus berechnet sich das Trägheitsmoment M der schwingenden Scheiben um die Hauptachse

$$M = 1{,}54950 \,.\, 10^{10} \text{ mgr} \,.\, \text{mm}^2$$

Der Radius der schwingenden Glasscheibe ergab sich aus 10 Messungen

$$R = 84.13 \text{ mm}$$

während sich derjenige des Gefässes als

$$R' = 94.30 \text{ mm}$$

ergab.

Wurde die Scheibe in die Flüssigkeit gesenkt (resp. das Gefäss gehoben), so bildeten sich in den meisten Fällen beim Auftreffen der Scheibe auf die Oberfläche Luftblasen. Um diese bemerken zu können, war die Platte P aus Glas gefertigt. Durch diese und den Gefässboden hindurch konnte das Vorhandensein dieser Luftblasen erkannt werden. Fortgeschafft wurden sie durch geeignetes Heben und Senken des Gefässes.

Um dieselbe Prüfung auch für undurchsichtige Flüssigkeiten wie Quecksilber anstellen zu können, hatte ich nur nöthig, von oben herein zwischen Glasscheibe und Bleiplatte hindurchzusehen.

Schwieriger war es die Temperatur der sehr dünnen Flüssigkeitsschicht zu bestimmen: denn die Kugel eines Thermometers konnte nicht eingesenkt werden. Ich war daher genöthigt die Temperatur mit Hilfe von Thermoströmen und Galvanometer zu messen. Ein aus vier feinen Eisendrähten zusammengedrillter Strang war an seinen beiden Enden mit Kupferdraht von ungefähr gleicher Dicke zusammengelöthet. Die eine Löthstelle befand sich in einem grossen Gefässe mit Wasser, dessen Temperatur bequem verändert und an einem guten Thermometer abgelesen werden konnte. Die andere Löthstelle wurde vor und nach dem Versuche in die zu untersuchende Flüssigkeit getaucht. Waren die Temperaturen gleich, so war der Strom gleich Null, die Nadel des Galvanometers ward nicht abgelenkt. Waren die Temperaturen verschieden, so erfuhr die Nadel eine Ablenkung, die mit Fernrohr, Spiegel und Scala gemessen wurde. Es wurde nun bestimmt, welcher Temperaturdifferenz der Löthstellen ein Ausschlag der Nadel von 1 Scalentheil entsprach. Es ergab sich, dass eine Temperaturdifferenz von 0,02 Grad Celsius einen Ausschlag der Nadel von 1 mm bewirkte. Diese Grösse wurde bei Beginn und am Schluss der Versuche bestimmt.

Der Draht, an welchem die Scheibe hing, hatte eine Länge von 1063 mm und einen Durchmesser von 0,65 mm und war durch eine Klemmschraube an einem kurzen Querbalken befestigt, welcher seinerseits in die Mauern einer Ecke des Gebäudes eingefügt war; auch das Gefäss mit dem übrigen Apparate war auf einem Consol aufgestellt, welches direct an die Mauer befestigt war. Trotz dieser Vorsichtsmassregeln wurde mancher Versuch durch die Schwankungen verdorben, in die ein vorüberrollender Wagen die Mauern versetzte. Die obere Klemmschraube des Drahtes konnte mittels eines Griffes gedreht und der Drehungswinkel an einem Torsionskreise abgelesen werden.

§ 13.

Ein Versuch wurde nun in folgender Weise angestellt. Nachdem die Platte P genau horizontal und mit dem Drahte coaxial aufgestellt war, wurde sie so weit herabgezogen, dass das Gefäss mit einer sehr geringen Menge der zu untersuchenden Flüssigkeit auf sie aufgesetzt werden konnte. Das Gefäss wurde nun vorsichtig so weit gehoben, bis die Glasscheibe auf die Flüssigkeit aufstiess. Hierbei bildete sich meist eine grössere Menge Luftblasen, die erst durch geeignetes Heben und Senken des Gefässes entfernt werden musste. Sodann wurde das Gefäss so weit gehoben, bis die Scheibe grade auf den Gefässboden aufstiess und das Fadenkreuz des Mikroskops mit dem nächsten sichtbaren Scalentheil zur Coincidenz gebracht. Nun wurde das Gefäss sehr langsam so weit gesenkt, bis die Flüssigkeit grade noch nicht die Scheibe verliess, sodass die letztere die Oberfläche grade berührte. Im Mikroskop wurde jetzt der Punkt der Scala bestimmt, mit welchem das Fadenkreuz nun zusammenfiel und somit die Entfernung der Scheibe vom Gefässboden und dadurch zugleich die Dicke der Flüssigkeitsschicht ermittelt. Nun wurde das Gefäss durch eine Glasplatte gegen herabfallenden Staub geschützt. Um den Nullpunkt des Galvanometers zu finden, wurde aus der Wasserleitung Wasser in zwei verschiedene Glasgefässe gegossen und in diese je eine Löthstelle der Thermokette eingesenkt. Sobald die Nadel ruhig stand, wurde dieser Punkt als Nullpunkt notirt und die eine Löthstelle in die zu untersuchende Flüssigkeit getaucht.

Da die Tiefe dieser letzteren so gering war, so musste bei der Herstellung der Thermokette darauf geachtet werden, dass die Löthstelle so kurz als möglich sei; sie hätte sonst nämlich gar nicht die Temperatur jener Flüssigkeit angenommen. Nach Stillstand der Nadel wurde der Scalentheil bestimmt, welcher nun mit dem Fadenkreuze des Fernrohres zusammenfiel, und die Temperatur des Wassers, in dem sich die andere Löthstelle befand. Jetzt wurde die Löthstelle wieder aus der Flüssigkeit herausgenommen und letztere durch die Glasplatte bedeckt. Hierauf ward die Scheibe in der angegebenen Weise durch den Magneten in Schwingungen versetzt und mittels Fernrohr, Spiegel und Scala wenn es anging 21 successive Umkehrpunkte der Scheibe notirt. Nachher wurde auf dieselbe Weise wie vor dem Versuche nochmals die Temperatur der Flüssigkeit bestimmt. Wegen der geringen Anzahl von Schwingungen, die zu beobachten möglich waren, musste ich darauf verzichten, die Veränderlichkeit der Schwingungsdauer mit wachsender Entfernung zu bestimmen, sondern beschränkte mich darauf, aus einer Reihe Schwingungsbeobachtungen das Mittel der Schwingungszeiten zu berechnen.

§ 14.

Wie bereits früher bemerkt, wurden logarithmische Decremente nur für Entfernungen beobachtet, welche zwischen 0,5 mm und 2,00 mm lagen, um die von mir entwickelte Formel (20) anwenden zu können. Die Schwingungen von Scheiben an der Oberfläche und im Innern von Flüssigkeiten sind in neuerer Zeit mehrfach Gegenstand der Untersuchung geworden. Ich habe vor dem Texte einige der wichtigsten hierher gehörigen Untersuchungen citirt. Vorläufig musste ich es dahingestellt sein lassen zu untersuchen, in welcher Weise die Oberfläche auf die Bewegung der Scheibe einwirkt; jedenfalls war der Beitrag der Oberfläche auf das logarithmische Decrement verhältnissmässig so gering, dass ich mit Sicherheit etwas Genaues darüber nicht angeben kann. Ich machte ferner bei allen Experimenten, welche ich für sehr kleine Entfernungen anstellte, die Erfahrung, dass die Abnahme der Schwingungen nicht genau in geometrischer Progression erfolgte, sondern die Abnahme bei kleineren Amplituden ziemlich regelmässig wächst.

Ich habe bei der Berechnung der Reibungscoefficienten nur solche Versuche zu Grunde gelegt, bei welchen die Abnahme wirklich, wie es die Theorie verlangt, in geometrischer Reihe erfolgte.

Bei der geringen Menge Versuche, die ich gegenwärtig mitzutheilen in der Lage bin, war ich ferner ausser Stande, die Abhängigkeit des Reibungscoefficienten von der Temperatur selbständig zu ermitteln. Ich muss mich daher vorläufig damit begnügen, eine von O. E. Meyer (Wiedemann's Ann. Band II) nach Beobachtungen von Rosencranz angegebene Formel zu benützen. Nach dieser ist

$$\eta_\vartheta = \frac{\eta_0}{1 + 0.04635\ \vartheta}$$

und zwar wird $\eta_0 = 1.854$ angegeben.

Ich beobachtete für

Destillirtes Wasser

Schwingungszeit $T_1 = 17.164$ sec.

Entfern. c_1	Logar. Decrem. l (Basis e)	Temp. ϑ Gr. Celsius.	η beob.	η berechn.
1.237	0.002430	11.42	1.189	1.182
1.345	2026	13.33	1.079	1.117
1.354	2033	12.57	1.090	1.141
1.569	1557	18.82	0.967	0.965
1.666	1651	14.08	1.089	1.094
1.812	1615	14.27	1.071	1.087
1.832	1607	12.38	1.152	1.148

In der vierten Colonne stehen die Werthe von η wie sie sich durch directe Berechnung nach Formel (20) ergeben. Nach der Methode der kleinsten Quadrate ergab sich

$$\eta_0 = 1.807$$

also etwas kleiner als bei Rosencranz. Sodann wurden nach obiger Formel die Werthe von η für die verschiedenen Temperaturen berechnet; die Vergleichung der beobachteten und berechneten Werthe von η ergiebt als mittleren Beobachtungs-Fehler 0.027.

Nach Helmholtz ergiebt sich

$$\eta_0 = 1.778$$

ein Werth, der mit dem meinigen sehr nahe übereinstimmt.

Ich habe ferner versucht die innere Reibung des Quecksilbers zu ermitteln, sowie den Coefficienten der äusseren Reibung zwischen Quecksilber und Glas zu bestimmen. Hier musste die Vorsicht angewandt werden, das Quecksilber vor jedem einzelnen Versuche durch Leder zu pressen, um jede Spur von Verunreinigung von dessen Oberfläche zu entfernen. Wird diese Vorsicht unterlassen, so vermehrt sich sehr bald das logarithmische Decrement ausserordentlich; nach wenigen Stunden ist die Kraft des Magneten nicht mehr im Stande, die Scheibe in Bewegung zu setzen, obgleich die Oberfläche noch ganz frisch und staubfrei aussieht. Der Boden des Gefässes wurde vor jedem einzelnen Versuche wieder mit der grössten Sorgfalt horizontal gestellt und darauf so viel Quecksilber zugegossen, bis der Boden gerade bedeckt war. Die Höhe dieser Quecksilberschicht hat bekanntlich einen constanten Werth; nach Quincke's Messungen beträgt sie

$$c_1 = 3.629 \text{ mm.}$$

Die Schwingungszeit der Scheibe ergab sich als $T_2 = 17.428$ sec. Aus 9 gleich guten Beobachtungen ergab sich für die Mitteltemperatur $\vartheta = 17.08^0$ C das logarithmische Decrement

$$L = 0.025673.$$

Zur Berechnung von η und E wurden die Formeln (37) und (38) benützt und aus diesen gefunden für

$\vartheta = 17.08$ $\qquad$ $\eta = 1.551$

$\qquad\qquad\qquad\quad$ E = 33.092.

Im XLVI. Bande der Sitzungsberichte der Wiener Akademie giebt Stefan den Werth von E an auf

$$w = 0.0035$$

w ist gleichfalls bezogen auf mm, sec. und mgr. Es wurde berechnet aus den Schwingungen, welche eine Quecksilbermenge in einer heberförmigen Röhre macht. Diese Grösse w enthält aber in ihrem Ausdrucke die Beschleunigung durch die Schwerkraft g im Nenner; um also w auf E zu reduciren, muss ich mit g = 9810 mm multipliciren; ich erhalte sodann für $\vartheta = 18^0$ C., E = 34.336, also in guter Uebereinstimmung

mit dem von mir berechneten. Nach Warburgs Versuchen ist $\eta = 1.571$ für $\vartheta = 17^0$; dagegen ist E nach den Beobachtungen dieses Forschers (Pogg. Annalen Bd. 140) gleich unendlich zu setzen.

Endlich habe ich eine Reihe von Versuchen über innere Reibung des Alkohols angestellt. Ich bin hier jedoch nur in der Lage einen aus den Beobachtungen gezogenen Mittelwerth mittheilen zu können, da die abgelesenen Temperaturen nicht immer die der Flüssigkeit gewesen zu sein scheinen. Vielleicht ist dies dadurch zu erklären, dass an der Löthstelle, welche sich in der dünnen Schicht Alkohol befand, eine bei den einzelnen Versuchen verschiedene Verdunstung stattfand, welche die Temperaturbestimmung ungenau machte. Aus 20 Experimenten ergab sich im Mittel die Schwingungszeit $T_3 = 17.1671$ sec. und für $\vartheta = 16.34$ $\eta = 1.428$.

Indem ich hiermit meine Erstlingsarbeit schliesse, kann ich nicht umhin, Herrn Professor O. E. Meyer in Breslau für alle an mich gewandte Sorgfalt meinen innigsten Dank öffentlich auszusprechen. Denn nicht nur verdankt die ganze Arbeit ihre Entstehung der Anregung, die er mir als seinem Schüler im mathematisch-physikalischen Seminar gegeben, sondern er hat im Laufe der experimentellen Untersuchung mir stets als wohlwollender Rather aufs freundlichste beigestanden. Ebenso sage ich Herrn Professor Dr. E. Dorn und Herrn Dr. Schumann für manchen nützlichen Fingerzeig meinen wärmsten Dank.

Hartmannsdorf bei Marklissa, im Juni 1881.

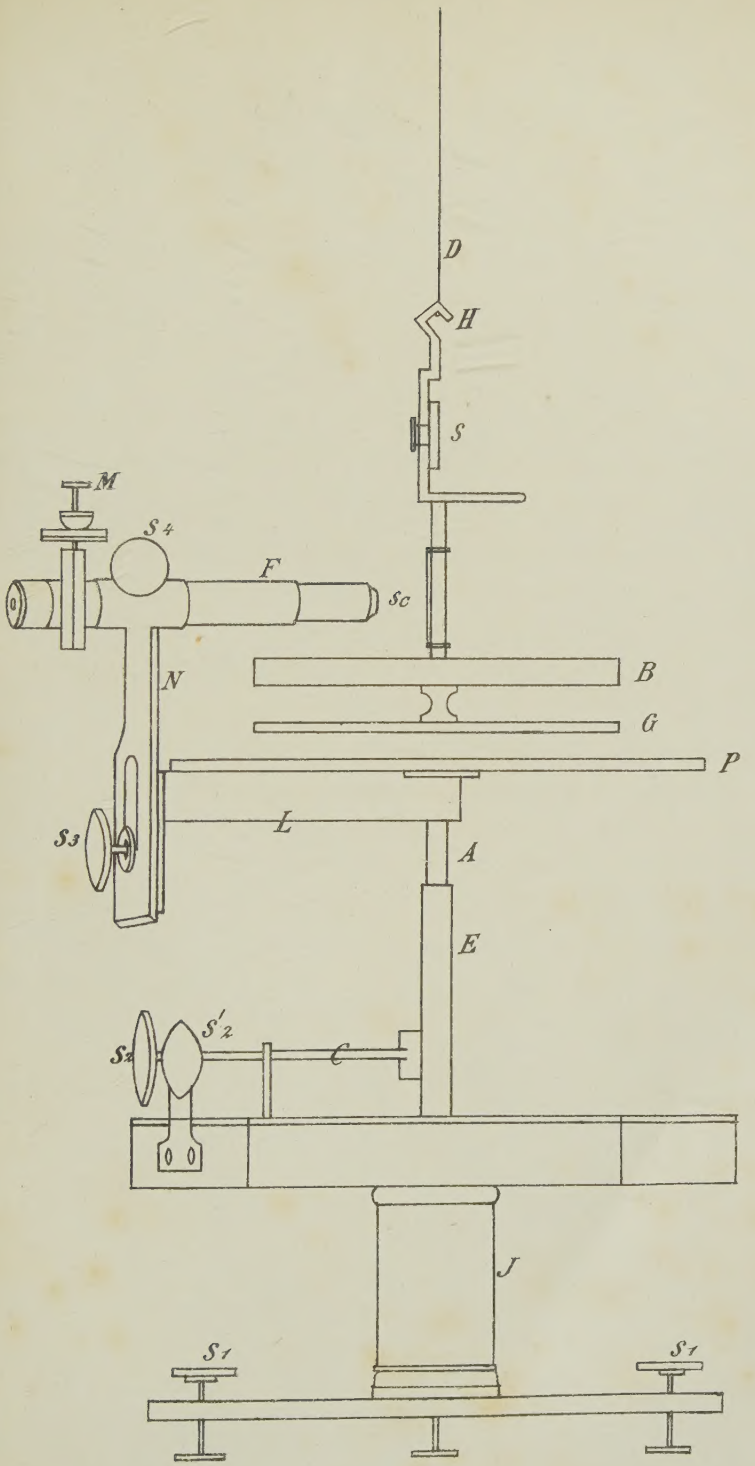
Lebenslauf.

Ich, Theodor Siegfried Conrad Herrmann Schmidt bin am 21. Mai 1857 zu Breslau geboren. Als Sohn des 1873 verstorbenen Tuchscheermeisters Gustav Schmidt, evangelischer, und seiner Ehefrau Hedwig Schmidt, geb. Feilhauer, katholischer Confession, wurde ich selbst evangelisch getauft. Nachdem ich von Ostern 1863 bis Michaelis 1866 eine Breslauer Elementarschule besucht, trat ich zu jener Zeit in die Realschule I. Ordnung „zum heiligen Geist“ in Breslau ein, die ich Michaelis 1876 mit dem Zeugniss der Reife verliess. Hierauf studirte ich während 9 Semester zu Breslau Mathematik und Naturwissenschaften und hörte Vorlesungen der Herren Professoren F. Cohn, Dilthey, Dorn, Galle, Grube, Körber, Krause, O. E. Meyer, Oginski, Römer, Rosanes, Schröter, Weber. An den Uebungen des mathematisch-physikalischen Seminars nahm ich 7 Semester theil, nämlich 1 Semester bei Herrn Professor Schröter, 2 Semester bei Herrn Professor Rosanes und 4 Semester bei Herrn Professor O. E. Meyer. Ausserdem arbeitete ich 2 Semester selbständig im physikalischen Institute.

Allen diesen Herren sage ich für die erfahrene Anregung und Ausbildung an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank.

Thesen.

1. Die Methode von Maxwell zur Bestimmung der inneren Reibung der Gase ist auch für Flüssigkeiten anwendbar.
2. Das Gesetz, welches Maxwell für Gase gefunden hat, dass nämlich das logarithmische Decrement einer in einem Gase schwingenden Scheibe für sehr kleine Entfernungen derselben vom Gefässboden mit dieser Entfernung multiplicirt einen constanten Werth ergiebt, gilt auch für Flüssigkeiten.
3. Das Studium der Mathematik ist von dem der beschreibenden Naturwissenschaften zu trennen und als verbindendes Glied dieser Wissenschaften das Studium der Geographie einzuführen; so zwar, dass Mathematik und Geographie, und Naturwissenschaft und Geographie zusammengehören.


D
H
S
M
S4
F
Sc
N
B
G
P
L
S3
A
E
S2
S'2
C
J
S1
S1